

Durée : 4 heures

## Corrigé du baccalauréat S Métropole septembre 2004

### EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. a.  $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x+1)(x-1) + bx(x-1) + cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(a+b+c)x^2 + (c-b)x - a}{x(x+1)(x-1)}$ . En identifiant les deux écritures on obtient :

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ -b+c = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b+c = 1 \\ -b+c = 0 \\ a = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

Finalemment  $g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$ .

b. Une primitive  $G$  de  $g$  sur  $]1; +\infty[$ , donc pour  $x > 1 > 0 > -1$  est

$$G(x) = -\ln x + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) = -\ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1) = \ln \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

2. Posons  $u(x) = x^2 - 1$ , alors  $u'(x) = 2x$ , donc une primitive de  $\frac{2x}{(x^2-1)^2} = \frac{u'}{u^2}$

est  $\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x^2-1}$ .

3. Posons :  $\begin{cases} u(x) = \ln x & v'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = \frac{-1}{x^2-1} \end{cases}$ .

Les fonctions étant dérivables et les dérivées continues on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{-\ln x}{x^2-1} \right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} = \\ &= \left[ \ln \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{-\ln x}{x^2-1} \right]_2^3 = \ln \left( \frac{\sqrt{8}}{3} \right) - \frac{\ln 3}{8} - \ln \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\ln 2}{3} = \\ &= \frac{3}{2} \ln 2 - \ln 3 - \frac{\ln 3}{8} - \frac{\ln 3}{2} + \ln 2 + \frac{\ln 2}{3} = \left( 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right) \ln 2 - \left( 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) \ln 3 = \\ &= \frac{17}{6} \ln 2 - \frac{13}{8} \ln 3. \end{aligned}$$

### EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

1. Tous les nombres étant supérieurs à zéro :  $x^y = y^x \iff \ln(x^y) = \ln(y^x) \iff y \ln x = x \ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ .

2. a. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

En 0,  $h(x) = \ln x \times \frac{1}{x}$ ; de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , il en résulte par produit des limites que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ .

b. On calcule la dérivée du quotient de deux fonctions dérivables :

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}. \text{ Le signe de la dérivée est celui de } 1 - \ln x.$$

Or  $1 - \ln x = 0 \iff x = e$ . La dérivée est donc positive sur l'intervalle  $]0; e[$  (donc  $h$  est croissante sur cet intervalle) et négative sur  $]e; +\infty[$  (donc  $h$  est décroissante sur cet intervalle).

L'extremum est obtenu lorsque la dérivée s'annule en changeant de signe;

$$\text{ici on a un maximum pour } x = e \text{ qui est égal à } f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

c. On a  $h(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

3. D'après la question précédente la fonction  $h$  est monotone, strictement croissante, continue sur  $]1; e[$  à valeurs dans  $]0; \frac{1}{e}[$  :  $\lambda$  appartenant à cet intervalle il existe donc un réel unique  $a \in ]1; e[$  tel que  $f(a) = \lambda$ .

De même,  $h$  est monotone, strictement décroissante, continue sur  $]e; +\infty[$  à valeurs dans  $]0; \frac{1}{e}[$  :  $\lambda$  appartenant à cet intervalle, il existe un réel unique  $b$  de  $]e; +\infty[$  tel que  $f(b) = \lambda$ .

$$\text{On a donc trouvé } \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} = \lambda.$$

4. a. Si  $s(a) = b$ , quand  $a$  vers 1,  $\lambda$  tend vers zéro et  $b$  tend vers plus l'infini.

b. Si  $a$  tend vers  $e$  (avec  $a < e$ ), alors  $\lambda$  tend vers  $\frac{1}{e}$  et  $b$  tend vers  $e$  (avec  $e < b$ ).

c. Si  $a$  croît, alors  $b$  décroît : la fonction  $s$  est décroissante.

5. Les seuls entiers de l'intervalle  $[1; e]$  sont 1 et 2. 1 ne donne pas de solution et 2 donne le couple (2; 4). On vérifie que  $2^4 = 4^2 = 16$ . C'est le seul couple d'entiers qui commutent.

Les couples (2; 4) et (4; 2) sont les seuls couples solutions.

### EXERCICE 3

5 points

#### Commun à tous les candidats

#### Partie A

- Soit  $A$  l'évènement : « être une particule du type A » ;  $p(A) = 0,75$ .

- Soit  $B$  l'évènement : « être une particule du type B » ;  $p(B) = 0,25$ .

On a  $p_A(K1) = \frac{1}{3}$ ,  $p_A(K2) = \frac{2}{3}$  ; et  $p_B(K1) = \frac{1}{2}$ ,  $p_B(K2) = \frac{1}{2}$ .

$$1. p(A1) = p(A \cap K1) = p_A(K1) \times p(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4};$$

$$p(A2) = p(A \cap K2) = p_A(K2) \times p(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2};$$

$$p(B1) = p(B \cap K1) = p_B(K1) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$p(B2) = p(B \cap K2) = p_B(K2) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$p(C1) = p[(A \cap K1) \cup (B \cap K1)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8};$$

$$p(C2) = p[(A \cap K2) \cup (B \cap K2)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8};$$

2. On a une expérience de Bernoulli avec  $n = 5$  et  $p = \frac{5}{8}$ .

$$\text{On a } p(E) = \binom{5}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{8}\right)^3 \approx 0,206.$$

**Partie B**

1. À l'instant 0, la proportion est de 0,75 et au bout de 5730 ans la proportion n'est plus que la moitié soit 0,375.

$$\text{Soit } 0,375 = 0,75e^{-5730\lambda} \iff \frac{1}{2} = e^{-5730\lambda} \iff -5730\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0,00012 \text{ à } 10^{-5} \text{ près par défaut.}$$

2. On cherche le temps  $t$  au bout duquel il ne reste plus que 90% de particules soit  $0,75e^{-0,00012t} \approx 0,9 \times 0,75 \iff e^{-0,00012t} \approx 0,9 \iff -0,00012t \approx \ln(0,9)$

$$\iff t \approx \frac{\ln 0,9}{-0,00012} \approx 878 \text{ ans.}$$

3. Même question avec 50% :

$$0,75e^{-0,00012t} \approx 0,5 \iff e^{-0,00012t} \approx \frac{0,5}{0,75} \iff -0,00012t \approx \ln \frac{2}{3} = \iff$$

$$t \approx \frac{\ln(\frac{2}{3})}{0,00012} \approx 3379 \text{ ans}$$

**EXERCICE 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1.  $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$  ;  $\Delta = 64 \times 3 - 64 \times 4 = +64 \times (-1) = (8i)^2$ . Il y a donc deux solutions imaginaires conjuguées :

$$S = \{4\sqrt{3} - 4i ; 4\sqrt{3} + 4i\}.$$

2. a.  $a = 4\sqrt{3} - 4i$ , donc  $|a|^2 = 48 + 16 = 64 \iff |a| = 8$ . On peut donc écrire

$$a = 8 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{De même } b = 4\sqrt{3} + 4i = 8 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 8e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

- b. On a déjà  $|a| = 8 = OA$  et  $|b| = 8 = OB$ .  $AB = |b - a| = |8i| = 8$ .

Le triangle OAB est donc équilatéral.

3. On a donc  $d = (-\sqrt{3} + i)e^{-i\frac{\pi}{3}} = (-\sqrt{3} + i) \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2i$ .

4. a. La somme des coefficients est égale à 1, donc non nulle : le point G existe.

Par définition  $-\vec{GO} + \vec{GD} + \vec{GB} = \vec{0} \iff \vec{OG} = \vec{OD} + \vec{OB}$  qui se traduit par  $z_G = z_D + z_B = 4\sqrt{3} + 6i$ .

- b. Pour A et B, on utilise le cercle de centre O et de rayon 8, pour C et D le cercle de rayon 2. Pour G la construction est évidente.

- c. Le vecteur  $\vec{CD}$  a pour affixe  $\sqrt{3} + i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$  ; de même le

vecteur  $\vec{DG}$  a pour affixe  $4\sqrt{3} + 4i = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$ . ces deux vecteurs ont le même argument, donc les points C, D et G sont alignés.

- d. On a montré que  $\vec{OG} = \vec{OD} + \vec{OB} \iff \vec{BG} = \vec{OD} \iff$  BGDO est un parallélogramme.

5. On trouve rapidement que  $GA = CA = CG = 10$  : le triangle ACG est équilatéral.

## EXERCICE 4

5 points

## Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

## Partie A

1. B et C sont deux points du cercle équidistants du centre O : O appartient à la médiatrice de [BC];

DB = DC : D appartient à la médiatrice de [BC];

Enfin G appartient à la médiane issue de D dans le triangle BCD, médiane qui est aussi la médiatrice de [BC].

Conclusion : la droite contenant O, D et G est la droite des milieux dans le triangle ABC, donc elle est parallèle à la droite (AB). Conséquence dans le triangle BCM la droite (GD) contenant le milieu de [BC] et parallèle à (BM) coupe [CM] en son milieu G.

2. le rapport de la similitude est  $\frac{CM}{CB}$ . Or  $CM = 2CG$  et  $CG = \frac{2}{3}CB \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Donc

$$\frac{CM}{CB} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ Quant à l'angle de la similitude il vaut } -\frac{\pi}{6}.$$

## Partie B

1. On a  $z_E - z_A = (z_C - z_A) e^{i\frac{\pi}{3}}$ , donc  $z_E = -1 + 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = i\sqrt{3}$ .

2. Rapport et angle de la similitude :  $\frac{3+i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ . Le rapport est  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et l'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

Le centre est le point invariant ;  $z = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4} \iff z = 1$ . Le centre de la similitude est donc le point C.

La réciproque de cette similitude a le même centre C, le rapport inverse soit  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  et l'angle opposé soit  $-\frac{\pi}{6}$  : c'est bien la similitude  $s$ .

3. On a  $z_{E'} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \times i\sqrt{3} + \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Cette affixe a pour module 1 : le point E' appartient donc à  $\Gamma$ .

4. On a  $E' = \sigma(E) \iff E = s(E')$ , d'après la question précédente. Or E' appartient à  $\Gamma$ , donc E appartient à  $\mathcal{C}$ .

M est l'image de B par  $s$ , donc l'image du cercle  $\Gamma$  par la similitude  $s$  est un cercle de centre O' de rayon  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . O' a pour affixe  $\frac{1}{\sqrt{3}}i$ . On a de façon évidente

$\vec{EO'} = \frac{2}{3}\vec{EO}$ , ce qui signifie que O' est le centre de gravité du triangle équilatéral ACE.

$\mathcal{C}$  est donc le cercle de centre O' contenant E.