Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole ∾ septembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. En posant $X = \dfrac{x}{2}$, on a $f(X) = (40X + 10)\mathrm{e}^{-X} = 40\dfrac{X}{\mathrm{e}^X} + \dfrac{10}{\mathrm{e}^X}$. La limite de ces deux termes en plus l'infini est nulle :

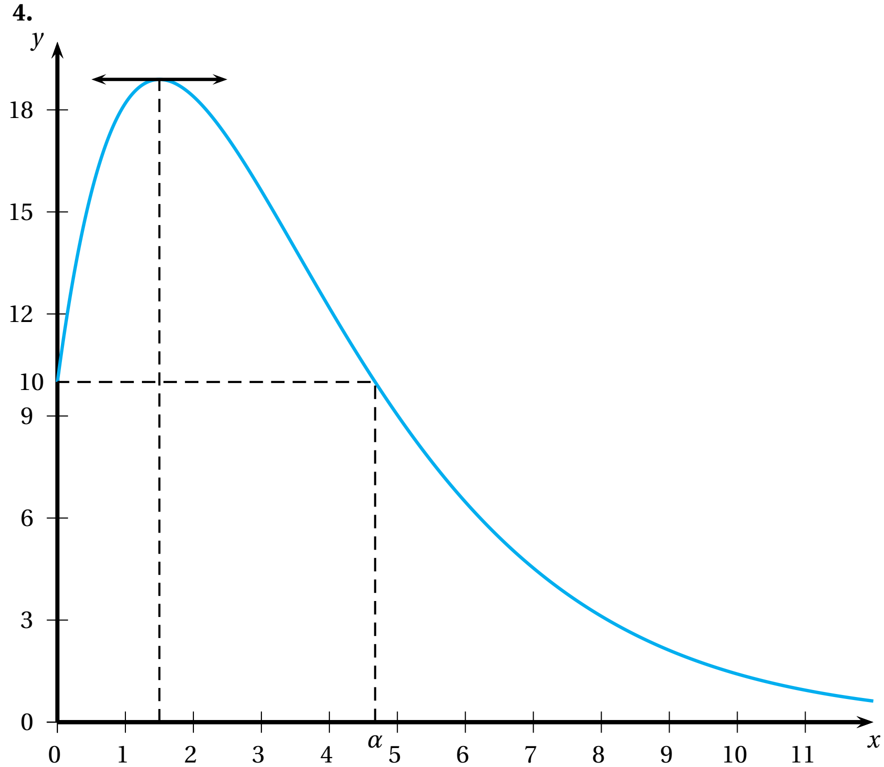
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

2. $f'(x) = (20 - 10x - 5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = (15 - 10x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ qui est du signe de $(15 - 10x)$ car $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Cette dérivée s'annule en $\dfrac{3}{2}$. D'où le tableau de variations :

x	0		$3/2$		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$			
f	10	$\nearrow$	$40\mathrm{e}^{-3/4}$	$\searrow$	10	$\searrow$	0

3. Sur $]0\ ;\ 3/2]$, $f(x) > 10$, donc l'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solution ; sur l'intervalle $]3/2\ ;\ +\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable, monotone décroissante de $40\mathrm{e}^{-3/4} \approx 18,9$ à 0. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]3/2\ ;\ +\infty[$ tel que $f(x) = 10$. La calculatrice donne $\alpha \approx 4,673$.

4.



5. On intègre I par parties. En posant : $\begin{cases} u(x) = 20x+10 & v'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \\ u'(x) = 20 & v(x) = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

On a $\mathrm{I} = \left[-2(20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 + \displaystyle\int_0^3 40\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x = \left[-2(20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 - \left[80\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 =$ $\left[-40x - 100\mathrm{e}^{-3/2}\right]_0^3 = 100 - 220\mathrm{e}^{-3/2}$.

$$\mathrm{I} = 100 - 220\mathrm{e}^{-3/2} \approx 50,91 \text{ (u.a.)}$$

Partie B

1. On a effectivement $f(t) + \dfrac{1}{2}f'(t) = (15-10t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + (10t+5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Donc f est une solution de (E) sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Par définition on a $g'(t) + \dfrac{1}{2}g(t) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ et $g(0) = 10$. On vient de voir que $f(t) + \dfrac{1}{2}f'(t) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ d'où par différence de ces deux équations : $g' - f' + \dfrac{g}{2} - \dfrac{f}{2} = 0 \iff (g-f)' + \dfrac{1}{2}(g-f) = 0$.

Conclusion : la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle : (E$'$) $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.

b. Les solutions de l'équation (E$'$) sont les fonctions $t \longmapsto K\mathrm{e}^{-t/2}$.

c. La fonction $(g-f)$ est l'une de ces solutions. Or $(g-f)(0) = g(0) - f(0) = K = 10 - 10 = 0$. La fonction $g - f$ est donc la fonction nulle.

Conclusion : l'équation différentielle (E) a une solution unique vérifiant $y'(0) = 10$, c'est la fonction f de la **partie A**.

3. D'après la question **3.** de la partie A, cela correspond à la valeur α telle que $f(\alpha) = 10$. On a vu que $\alpha \approx 4,673\text{h} \approx 4$ h 41min.

4. $\theta = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{100 - 220\mathrm{e}^{-3/2}}{3} \approx 17$ (degrés).

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Réponse **D**
2. Réponse **C**
3. Réponse **C**
4. Réponse **A**
5. Réponse **D**

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. On a $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$; donc $z^{14} = (\sqrt{2})^{14}\mathrm{e}^{\frac{14\mathrm{i}\pi}{3}} = 2^7\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = 128\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) =$

$z^{14} = -64 + 64\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Réponse C

2. $|z-3| = |3-4\mathrm{i}| = 5 \iff \mathrm{S}M = 3 \iff M$ appartient au cercle de centre S et de rayon 3.

Réponse D

3. D'après le théorème d'Al-Kashi les diagonales AC a pour longueur $\sqrt{1^2+1^2-2\cos 120}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$.
ACF est un triangle rectangle en A, donc CF = 2. $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{CF}}=-\text{AC}\times\text{CA}=-3$.
Réponse : B

4. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}=g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}}{x-3}=\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}{x-3}=\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}{1-\dfrac{3}{x}}$ (en effet pour $x\leqslant 0$, $\sqrt{x^2}=|x|=-x$).
La limite du dénominateur est -1 et celle du numérateur au voisinage de moins l'infini est égale à 1, donc leur quotient a pour limite -1.
Réponse : A (au voisinage de moins l'infini).

5. On a par définition $f'(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}$ et en dérivant par rapport à x,
$f''(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
Réponse : C

EXERCICE 3 — 5 points

1. Un vecteur normal au plan $\mathscr{R}$ est le vecteur $\overrightarrow{r}\,(1\,;\,2\,;\,0)$. Or $\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n}=-2+2+0=0$. Ces vecteurs étant orthogonaux, les plans sont perpendiculaires.
2. Équation du plan $\mathscr{P}$. Son équation est de la forme $-2x+y+5z+d=0$ et $\text{B}\in\mathscr{P}\iff -2-2+5+d=0\iff d=-1$. Une équation de $\mathscr{P}$ est donc $-2x+y+5z-1=0$.
Les points communs aux deux plans vérifient les deux équations. On résout donc :
$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y\quad -7 &=& =0\\ -2x+y+5z-1 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 7\\ -2x+y &=& -5z+1\end{array}\right. \Longrightarrow 5x=10z+5\iff x=2z+1$ et en reportant dans l'une des des équations du plan,
$y=-z+3$.
Les deux plans étant perpendiculaires, leur intersection est bien une droite Δ défini par les équations $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2z+1\\ y &=& -z+3\\ z &=& z\end{array}\right.$ ou en remplaçant z par t :
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+1\\ y &=& -1t+3\\ z &=& 1t+0\end{array}\right.$. Ceci est l'équation d'une droite ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ et l'on vérifie aisément que pour $t=-1$, elle contient le point C$(-1\,;\,4\,;\,-1)$.
   a. On a $d(\text{A},\,\mathscr{P})=\dfrac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}}=\dfrac{18}{\sqrt{30}}=\dfrac{18\sqrt{30}}{30}=\dfrac{3\sqrt{30}}{5}$.
   De même $d(\text{A},\,\mathscr{R})=\dfrac{|5-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.
   b. Dans le plan contenant A et perpendiculaire aux deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$, le théorème de Pythagore peut s'appliquer et :
   $d^2(\text{A},\,\Delta)=d^2(\text{A},\,\mathscr{P})+d^2(\text{A},\,\mathscr{R})=\dfrac{270}{25}+\dfrac{180}{25}=\dfrac{450}{25}=18$.
   Conclusion : $d(\text{A},\,\Delta)=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.
3. **a.** $\text{A}M_t^2=(-4+2t)^2+(5-t)^2+(t+1)^2=6t^2-24t+42=6\left(t^2-4t+7\right)$.
   Le trinôme t^2-4t+7 a pour discriminant $\Delta=-40$. Il ne s'annule donc pas et est positif (coefficient de t^2 positif) quel que soit t. On peut donc calculer $\text{A}M_t=\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}=\varphi(t)$.

On pouvait également écrire : $t^2-4t+7=(t-2)^2+3$ somme de deux carrés qui est positive, et permet de prévoir le minimum de la question suivante.

b. $\varphi'(t)=\dfrac{12t-24}{2\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}}=\dfrac{6(t-2)}{\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}}$ qui est du signe de $t-2$. La fonction φ est donc décroissante sur $[0;2]$, puis croissante sur $[2\,;\,+\infty[$. Elle a donc un minimum en $t=2$ qui est égal à $\varphi(2)=\sqrt{6(4-8+7)}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

c. On reconnaît que M_t est un point de la droite Δ (question **1. b.**) et on a vu à la question **1. d.** que la plus courte distance de A à Δ était égale à $3\sqrt{2}$. On pouvait donc sans calcul prévoir ce résultat.

EXERCICE 4 — 3 points

Partie A

1. En construisant un arbre de probabilités pondérées, on trouve que $p(VV)=p(E)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$.
   De même $p(F)=p(VV)+p(BB)+p(RR)=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}=0,375$.
2. On a une expérience de Bernoulli avec $n=10$ et $p=\dfrac{3}{8}$.
   On a $p_F(E)=\dfrac{p(E\cap F)}{p(F)}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{6}{16}}=\dfrac{1}{6}$.
   Calculons la probabilité d'obtenir moins de deux fois l'évènement F.
   $p(0 \text{ fois } F)+p(1 \text{ fois } F)=\binom{10}{0}\left(\dfrac{3}{8}\right)^0\times\left(\dfrac{5}{8}\right)^{10}+\binom{10}{1}\left(\dfrac{3}{8}\right)^1\times\left(\dfrac{5}{8}\right)^9=\dfrac{5^{10}}{8^{10}}+\dfrac{30\times5^9}{8^{10}}=\dfrac{7\times5^{10}}{8^{10}}$.
   La probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties est donc $1-\dfrac{7\times5^{10}}{8^{10}}\approx 0,9363\approx 0,936$.

Partie B

Exercice en suspens; il me semble que le tableau est incorrect car la somme des effectifs n'est pas égale à 160 et il difficile pour un tétraèdre de tomber en équilibre sur un de ses sommets …