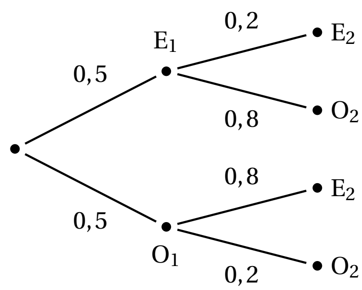
∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion ∽ septembre 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. On a $p\left(\mathrm{E}_1\right) = 0,5$; $p_{\mathrm{E}_1}\left(\mathrm{O}_2\right) = 0,8$; $p\left(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2\right) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$.
3. La probabilité cherchée est $p\left(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2\right) + p\left(\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2\right) = 0,1 + 0,5 \times 0,2 = 0,1 + 0,1 = 0,2$.

Partie B

1. On a ici une épreuve de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,5 = \dfrac{1}{2}$. La probabilité que k touristes partent à l'Est est donc : $\binom{n}{k}0,5^k \times (1-0,5)^{n-k} = \binom{n}{k}0,5^n$.
2. **a.** étant donné qu'il y a au moins 3 touristes et qu'il n'y a que 2 plages, il y a obligatoirement au moins deux touristes au moins sur une plage, donc il ne peut pas y avoir deux touristes *heureux*.

   b. Il ne peut y avoir un touriste *heureux* que dans deux cas :
   — un seul est parti à l'Est et les autres $(n-1)$ vers l'Ouest ;
   — un seul est parti vers l'Ouest et les autres $(n-1)$ vers l'Est.
   On a donc $p = \binom{n}{1}0,5 \times 0,5^{n-1} + \binom{n}{1}0,5 \times 0,5^{n-1} = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 2n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

   c. La probabilité qu'il y ait un touriste *heureux* parmi 10 touristes est :
   $\dfrac{10}{2^9} = \dfrac{10}{512} \approx 0,195$ soit 0,20 au centième près (1 chance sur 5).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\overrightarrow{\mathrm{O}M}(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}(x'\,;\,y')$.
   $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M'}(x'\,;\,y') = 0 \iff xx' + yy' = 0$.
   Or $z'\overline{z} = (x' + \mathrm{i}y')(x - \mathrm{i}y) = xx' + yy' + \mathrm{i}\left(xy' - x'y\right)$. D'où $\mathrm{Re}\left(z'\overline{z}\right) = xx' + yy'$.
   Conclusion : $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) = 0$.
2. De même O, M et M' sont alignés si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, soit si $y = \alpha x$ et $y' = \alpha x'$ soit si $xy' - x'y = 0$.
   Or $\mathrm{Im}\left(z'\overline{z}\right) = xy' - x'y$.
   Conclusion : O, M et M' sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(z'\overline{z}) = 0$.

Applications

3. Soit $N\left(z^2-1\right)$. D'après la question 1. $\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{O}N}$ sont orthogonaux si et seulement si $\text{Re}(\overline{z}\left(z^2-1\right))=0 \iff \text{Re}\left[(x-\text{i}y)\left(x^2-y^2-1+2\text{i}xy\right)\right]=0 \iff$ $x\left(x^2-y^2-1\right)+2xy^2=0 \iff x\left(x^2-1\right)=0 \iff x=0$ ou $x^2+y^2-1=0 \iff$ $x=0$ ou $x^2+y^2=1$.

L'ensemble des points M est donc la réunion de l'axe des ordonnées ($x=0$) et du cercle centré en O et de rayon 1 ($x^2+y^2=1$).

4. $P\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)$.

a. Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)&=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{\left[-z^2\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\right]}\\&=\overline{-z^2}\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}\\&=\overline{-z^2}\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\\&=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\end{aligned}$$

b. O, N et P sont alignés d'après 2. si et seulement si $\text{Im}\left[\left(\dfrac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)\right]=0 \iff \text{Im}\left[-\overline{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2\right]=0 \iff \text{Im}\left(-\overline{z}^2\right)=0 \iff \text{Im}\left(-x^2+2\text{i}xy+y^2\right)=0$ ou $\left|\dfrac{1}{z^2}-1\right|^2=0 \iff xy=0$ ou $\dfrac{1}{z^2}-1=0 \iff x=0$ ou $y=0$ ou $\dfrac{1}{z^2}=1 \iff x=0$ ou $y=0$ ou $z=-1$ ou $z=1$.

Conclusion : l'ensemble des points M tels que O, N et P sont alignés est la réunion des deux axes de coordonnées (excepté l'origine O).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

$(\mathcal{E})\quad:\quad 17x-24y=9$

1. a. On a $17\times 9-24\times 6=9$ qui est vraie.

b. De $\left\{\begin{array}{lcl}17x-24y&=&9\\17\times 9-24\times 6&=&9\end{array}\right.$, on déduit par différence :

$17(x-9)-24(y-6)=0 \iff 17(x-9)=24(y-6)\quad(1)$.

Donc 24 divise $17(x-9)$, mais étant premier avec 17, divise $x-9$. Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-9=24k \iff x=9+24k$.

En reportant dans (1), $17\times 24k=24(y-6) \iff 17k=y-6 \iff$ $y=6+17k$.

L'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ est donc :

$$\{(9+24k\,;\,6+17k)\},\ k\in\mathbb{Z}.$$

On vérifie que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $17(9+24k)-24(6+17k)=$ $153+17\times 24k-144-24\times 17k=9$.

2. a. Si Jean a effectué y tours avant d'attraper le pompon à l'instant t, alors que le pompon a effectué x tours, alors $t=17x$ (le pompon), et comme Jean met $\dfrac{3}{8}\times 24=9$ secondes pour aller de H à A, alors pour lui $t=9+24y$, soit en égalant : $17x=9+24y \iff 17x-24y=9, x\in\mathbb{N},\ y\in\mathbb{N}$.

Le couple $(x\ ;\ y)$ doit donc être une solution de l'équation résolue à la question 1.
Or d'après l'ensemble des solutions, le plus petit couple de nombres positifs vérifiant cette équation est le couple $(9 ; 6)$. Donc le temps nécessaire à Jean pour attraper le pompon est $t = 17 \times 9 = 9 + 24 \times 6 = 153$ secondes soit 2 minutes et 33 secondes.

b. En deux minutes Jean n'a pas le temps d'attraper le pompon.

c. En raisonnant comme au a.

— Si Jean attrape le pompon au point B, on doit avoir $t = \dfrac{17}{4} + 17x = \dfrac{5}{8} \times 24 + 24y \iff 68x = 43 + 96y \iff 68x - 96y = 43$.
Or le PGCD de 68 et 96 est 4 qui ne divise pas 43, donc cette équation n'a pas de solutions entières.

— Si Jean attrape le pompon au point C, on doit avoir $t = \dfrac{17}{2} + 17x = \dfrac{7}{8} \times 24 + 24y \iff 34x = 25 + 48y \iff 34x - 48y = 25$.
Le PGCD de 34 et 48 est 2 qui ne divise pas 25, donc cette équation n'a pas de solutions entières.

— Si Jean attrape le pompon au point D, on doit avoir $t = \dfrac{51}{4} + 17x = \dfrac{1}{8} \times 24 + 24y \iff 68x = -39 + 96y \iff 68x - 96y = -39$.
Le PGCD de 68 et 96 est 4 qui ne divise pas 39, donc cette équation n'a pas de solutions entières.
Conclusion : Jean ne peut attraper le pompon qu'au point A.

d. Si Jean part de E, on a toujours $t = 17x$ et pour Jean $t = \dfrac{1}{8} \times 24 + 24y = 3 + 24y$, d'où $17x = 3 + 24y \iff 17x - 24y = 3$.
Or $17 \times 3 - 24 \times 2 = 3$, donc le couple $(3\ ;\ 2)$ est solution de cette équation.
Le temps nécessaire à Jean pour attraper le pompon est $t = 17 \times 3 = 51$ secondes qui sont bien inférieures aux deux minutes payées.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Si sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$, $y_0 > 0$, alors $z = \dfrac{1}{y_0}$ existe (et $z > 0$). En dérivant $z = \dfrac{1}{y_0}$, on obtient :

$z' = -\dfrac{y_0'}{y_0^2}$. Or par définition $y_0' = y_0^2 + \lambda y_0$, donc :

$z' = -\dfrac{y_0^2 + \lambda y_0}{y_0^2} = -1 - \lambda\dfrac{1}{y_0} = -1 - \lambda z$.

De plus $y(0) = 1 \Rightarrow z(0) = \dfrac{1}{y(0)} = 1$.

Conclusion z est solution de l'équation différentielle : $\left\{\begin{array}{rcl} z' & = & -1 - \lambda z \\ z(0) & = & 1 \end{array}\right.$

2. a. Cours : posons $u = \lambda z + 1$; u est dérivable et $u' = \lambda z' = -\lambda(\lambda z + 1)$ (z solution de l'équation différentielle).
Donc $u' = -\lambda u$ et d'après le pré-requis les fonctions u solution de cette dernière équation différentielle sont de la forme : $u(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda z + 1 \iff \lambda z = C\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1 \iff z = \dfrac{C}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}$ (car $\lambda \neq 0$).
De plus $z(0) = \dfrac{C}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda} = 1 \iff C - 1 = \lambda \iff C = 1 + \lambda$.
Ceci montre l'existence et l'unicité de la fonction z_0.

b. Donc $z_0(x) = \dfrac{1+\lambda}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}$.

3. **a.** Soit f définie sur $]0~;~1]$ par $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$. f somme de fonctions dérivables est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1+x-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1+x-1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ qui est un quotient de nombres supérieurs à zéro quel que soit $x \in]0~;~1]$.

La dérivée étant positive, la fonction f est croissante sur $]0~;~1]$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0$, il en résulte que $f(x) > 0$ sur $]0~;~1]$. Donc

$\ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1} > 0 \iff \ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$.

En particulier comme $0 < \lambda \leqslant 1$, $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.

b. On a $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1} \iff \dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{\lambda+1}$ (1).

Or $0 < \lambda \leqslant 1 \iff 1 < \lambda+1 \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\lambda+1}$ (2).

En comparant (1) et (2), on en déduit que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$.

4. On a $z_0(x) = 0 \iff \dfrac{1+\lambda}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda} = 0 \iff \mathrm{e}^{-\lambda x} = \dfrac{1}{1+\lambda} \iff -\lambda x = \ln\left(\dfrac{1}{1+\lambda}\right)$
$\iff \lambda x = \ln(1+\lambda) \iff x = \dfrac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} > \dfrac{1}{2}$ d'après la question précédente.

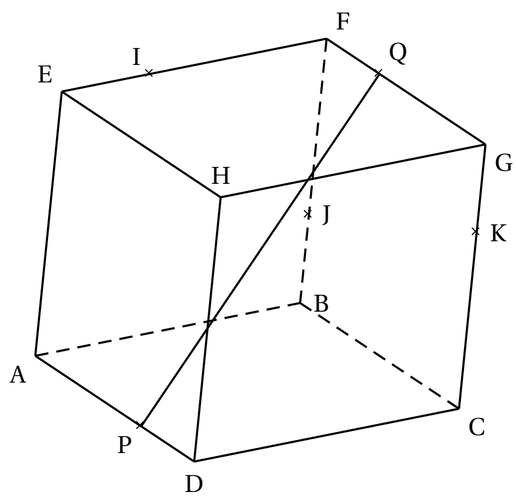
Conclusion la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty~;~\dfrac{1}{2}\right[$.

La fonction z_0 est continue et garde donc un signe constant sur $\left]-\infty~;~\dfrac{1}{2}\right[$. Comme $z_0(0) = 1 > 0$, il en résulte que la fonction z_0 est supérieure à zéro sur l'intervalle $\left]-\infty~;~\dfrac{1}{2}\right[$.

La fonction $y_0 = \dfrac{1}{z_0}$ existe donc, est positive comme inverse d'une fonction positive sur $\left]-\infty~;~\dfrac{1}{2}\right[$ et peut s'écrire :

$$y_0 = \frac{\lambda}{(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1}.$$

EXERCICE 4 — 5 points
Commun à tous les candidats



1. Par définition $2\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$.

De même $\overrightarrow{JF}+2\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{OJ}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OF}+2\overrightarrow{OB}\right)$ et enfin $2\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{OK}=\dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}\right)$.

Le point I (resp. J et K) est au tiers sur le segment [EF] (resp. [FB] et [GC]) à partir de E (resp. F et G).

2. Le point Ω du plan (IJK) équidistant des trois sommets du triangle (IJK) est le centre du cercle circonscrit à ce triangle donc le point commun aux trois médiatrices de ce triangle.

3. Dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\,;\,\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,;\,\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ les coordonnées sont :

— pour E(0 ; 0 ; 3)
— pour F(0 ; 3 ; 3)
— pour B(0 ; 3 ; 0)
— pour G(3 ; 3 ; 3)
— pour C(3 ; 3 ; 0)

On en déduit les coordonnées de I(0 ; 1 ; 3), de J(0 ; 3 ; 1) et de K(3 ; 3 ; 2).

4. P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3).

On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{IJ}=-1\times0+3\times2+3\times(-2)=6-6=0$ et $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{IK}=-1\times3+3\times2+3\times(-1)=-3+6-3=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ donc orthogonal à tout vecteur du plan (IJK).

Conclusion : la droite (PQ) est perpendiculaire au plan (IJK). ($\overrightarrow{PQ}$ est donc un vecteur normal au plan (IJK))

5. a. Soit $M(x\,:\,y\,;\,z)\in\Delta \iff M\text{I}=M\text{J}=M\text{K}$. Donc $M\text{I}^2=M\text{J}^2$ et $M\text{I}^2=M\text{K}^2$ soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+(y-1)^2+(z-3)^2 &=& x^2+(y-3)^2+(z-1)^2\\ x^2+(y-1)^2+(z-3)^2 &=& (x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 4y-4z &=& 0\\ 6x+4y-2z-12 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y-z &=& 0\\ 3x+2y-z &=& 6\end{array}\right.$$

Ces deux dernières équations sont les équations de deux plans de vecteur normal respectif $(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$ qui ne sont manifestement pas colinéaires. Ces deux plans ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants en une droite (Δ).

b. On a de façon évidente $0-0=0$ et $3\times 2+2\times 0-0=6$ qui sont des égalités vraies.

De même $3-3=0$ et $3\times 1+2\times 3-3=6$ qui sont aussi vraies.

P et Q sont donc bien des points équidistants des points I, J et K.

6. a. On a déjà vu que le vecteur $\overrightarrow{\text{PQ}}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

Une équation du plan (IJK) est donc $-x+3y+3z+d=0$. Et en écrivant que $\text{I}\in(\text{IJK}) \iff -0+3+9+d=0 \iff d=-12$, on trouve qu'une équation du plan (IJK) est :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\text{IJK}) \iff -x+3y+3z=12.$$

b. le point Ω est le point commun à (Δ) et au plan (IJK). Ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y-z &=& 0\\ 3x+2y-z &=& 6\\ -x+3y+3z &=& 12\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& z\\ 3x+y &=& 6\\ -x+6y &=& 12\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& z\\ y &=& 6-3x\\ -x+6(6-3x) &=& 12\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& z\\ y &=& 6-3x\\ 24 &=& 19x\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{24}{19} &=& x\\ \dfrac{42}{19} &=& y=z\end{array}\right.$$

Conclusion :

$$\Omega\left(\frac{24}{19}\ ;\ \frac{42}{19}\ ;\ \frac{42}{19}\right)$$