Corrigé du baccalauréat ES/L Métropole 21 juin 2013 (sujet dévoilé)

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Aucune justification n'était demandée dans cet exercice.

1. réponse **b.**

   La fonction f est négative sur $[-1\,;7]$ *donc l'intégrale est négative.*
2. réponse **b.**

   L'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *; son amplitude est* $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. *On résout l'inéquation* $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}04$ *et on trouve* $n \geqslant 2500$.
3. réponse **b.**

   On calcule la dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x\ln x}{x(x+1)^2}$ *donc* $f'(1) = 1$.

   Le coefficient directeur de la tangente vaut 1, *ce qui élimine les réponses **c.** et **d.** De plus* $f(1) = 1$ *donc la courbe et sa tangente passent par le point de coordonnées* $(1\,;1)$ *ce qui élimine la réponse **a.***
4. réponse **a.**

   Il faut d'abord que $x > 0$ et que $3x - 6 > 0$ ou $x > 2$. On cherche donc des solutions dans $]2\,;\,+\infty[$.

   $\ln x + \ln 2 \geqslant \ln(3x-6) \iff \ln(2x) \geqslant \ln(3x-6) \iff 2x \geqslant 3x-6 \iff 6 \geqslant x$ *; finalement* $2 < x \leqslant 6$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1. La production diminue de 2 % par an ; or diminuer de 2 % revient à multiplier par $1 - \dfrac{2}{100} = 0{,}98$.

   Donc pour tout n, $U_{n+1} = U_n \times 0{,}98$.

   De plus $U_0 = 120\,000$.

   La suite (U_n) est donc géométrique de premier terme $U_0 = 120\,000$ et de raison $q = 0{,}98$.

   D'après le cours, on peut déduire que, pour tout entier naturel n :

   $U_n = U_0 \times q^n = 120\,000 \times 0{,}98^n$.
2. **a.** Comme $2005 = 2000 + 5$, l'année 2005 correspond à $n = 5$.

   On cherche donc U_5 : $U_5 = 120\,000 \times 0{,}98^5 \approx 108\,470$

   Le nombre de jouets fabriqués en 2005 est 108 470.

   b. Pour déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000, on résout l'inéquation $U_n < 100\,000$.

$$\begin{aligned} U_n < 100\,000 &\iff 120\,000 \times 0{,}98^n < 100\,000 \iff 0{,}98^n < \frac{100\,000}{120\,000} \\ &\iff 0{,}98^n < \frac{5}{6} \iff \ln\left(0{,}98^n\right) < \ln\left(\frac{5}{6}\right) \\ &\iff n\ln(0{,}98) < \ln\left(\frac{5}{6}\right) \\ &\iff n > \frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{\ln(0{,}98)} \text{ car } \ln(0{,}98) < 0 \end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{\ln(0{,}98)} \approx 9{,}02$ donc $n \geqslant 10$.

   C'est donc à partir de $2000 + 10 = 2010$ que le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

   À la calculatrice on trouve $U_9 \approx 100\,050$ *et* $U_{10} \approx 98\,049$.

c. L'algorithme donné dans le texte affichera le plus petit entier n tel que $U_n < 90\,000$ si on complète les lignes 8 et 9 ainsi :

```
8 |     n prend la valeur n + 1
9 |     A prend la valeur A × 0,98
```

Autre possibilité :

```
8 |     n prend la valeur n + 1
9 |     A prend la valeur 120000 × 0,98^n
```

3. a. $1+0,98+0,98^2+\cdots+0,98^n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 0,98 ; donc :

$$1+0,98+0,98^2+\cdots+0,98^n = 1\times\frac{1-0,98^{n+1}}{1-0,98}=\frac{1}{0,02}\times\left(1-0,98^{n+1}\right)$$
$$=50\left(1-0,98^{n+1}\right)$$

b. $S_n = U_0+U_1+U_2+\cdots+U_n = U_0+U_0\times 0,98+U_0\times 0,98^2+\cdots+U_0\times 0,98^n$
$= U_0\left(1+0,98+0,98^2+\cdots+0,98^n\right) = 120\,000\times 50\left(1-0,98^{n+1}\right)$
$= 6\,000\,000\left(1-0,98^{n+1}\right)$

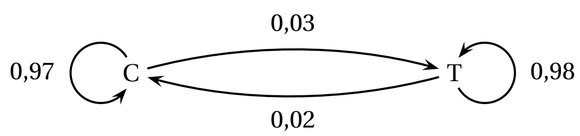
c. Le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années est égal à $U_0+U_1+\cdots+U_{14}=S_{14}=6\,000\,000\left(1-0,98^{15}\right)=1\,568\,585$

Le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production est égal à 1 568 585.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le graphe probabiliste traduisant les données de l'exercice est :



2. $P_1=\begin{pmatrix}c_1 & t_1\end{pmatrix}$

Or le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café donc $c_1=0,7$ et donc $t_1=1-c_1=1-0,7=0,3$.

Donc $P_1=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\end{pmatrix}$

3. La matrice de transition M de ce graphe, est $M=\begin{pmatrix}0,97 & 0,03\\0,02 & 0,98\end{pmatrix}$.

La probabilité qu'un employé choisisse du thé le quatrième jour est t_4 ; on va donc chercher $P_4=\begin{pmatrix}c_4 & t_4\end{pmatrix}$.

On sait que $P_4=P_3\times M$ et que $P_3=P_2\times M$ donc $P_4=P_2\times M^2$; de même $P_2=P_1\times M$ donc $P_4=P_1\times M^3$.

En effectuant les calculs à la calculatrice, on trouve $P_4\approx\begin{pmatrix}0,66 & 0,34\end{pmatrix}$, donc la probabilité qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour est 0,34.

4. a. L'état stable $\begin{pmatrix}c & t\end{pmatrix}$ est l'unique état tel que $\left\{\begin{array}{l}c+t\quad = 1\\ \begin{pmatrix}c & t\end{pmatrix}\times M=\begin{pmatrix}c & t\end{pmatrix}\end{array}\right.$

On calcule :

$$\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}\times M=\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,97 & 0,03\\0,02 & 0,98\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,4\times 0,97+0,6\times 0,02 & 0,4\times 0,03+0,6\times 0,98\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$$

De plus $0,4+0,6=1$

Donc $\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$ est l'état stable du système.

b. Puisque l'état stable est $\begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$, la probabilité qu'a un employé de prendre du café tend vers 0,4 donc la société CAFTHÉ qui pensait que la machine à café serait toujours la plus utilisée avait tort.

5. a. Par définition $P_{n+1} = P_n \times M$ donc $\begin{pmatrix}c_{n+1} & t_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_n & t_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,97 & 0,03\\ 0,02 & 0,98\end{pmatrix}$

ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l} c_{n+1} = 0,97\,c_n + 0,02\,t_n \\ t_{n+1} = 0,03\,c_n + 0,98\,t_n \end{array}\right.$

On en déduit que $c_{n+1} = 0,97\,c_n + 0,02\,t_n$; or $t_n = 1 - c_n$ donc
$c_{n+1} = 0,97\,c_n + 0,02\,(1 - c_n) \iff c_{n+1} = 0,97\,c_n + 0,02 - 0,02\,c_n$
$\iff c_{n+1} = 0,95\,c_n + 0,02$

b. En faisant tourner l'algorithme proposé, voici l'état des variables à chaque étape :

Variables	n	i	A	Jour
Saisie de n	3			
Initialisation de A	3		0,70	1
1er tour de boucle	3	1	0,685	2
2e tour de boucle	3	2	0,670 75	3
3e tour de boucle	3	3	0,657 212 5	4

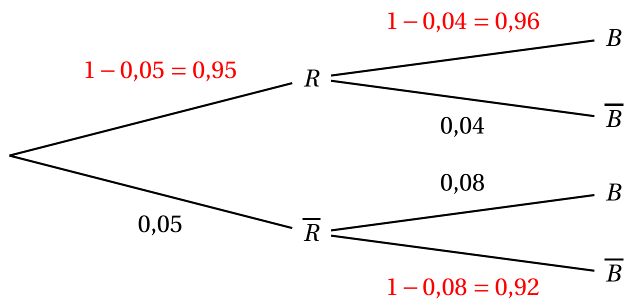
La valeur affichée par l'algorithme quand la valeur de n est égale à 3 est 0,657 212 5.
Cet algorithme permet de déterminer le pourcentage d'employés prenant un café le jour $n+1$; pour $n = 3$, donc le quatrième jour, il y a à peu près 66 % des employés qui prennent un café.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude du processus de mise en bouteille

1. Voici l'arbre pondéré traduisant l'énoncé :



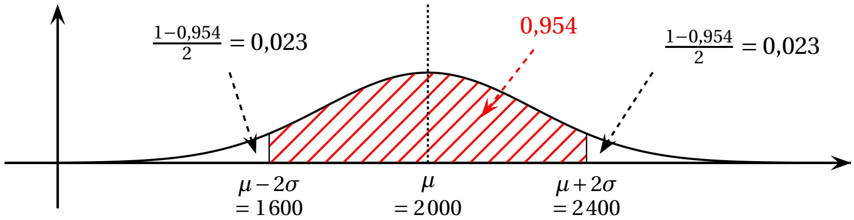
2. L'évènement « la bouteille est correctement remplie et elle a un bouchon » est l'évènement $R \cap B$.
$P(R \cap B) = P(R) \times P_R(B) = 0,95 \times 0,96 = 0,912$
La probabilité que la bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon est égale à 0,912.

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(R \cap B) + P\left(\overline{R} \cap B\right) = 0,912 + 0,05 \times 0,08 = 0,912 + 0,04 = 0,916$
La probabilité que la bouteille ait un bouchon est donc égale à 0,916.

4. On cherche la probabilité de l'évènement R sachant B :
$P_B(R) = \dfrac{P(B \cap R)}{P(B)} = \dfrac{0,912}{0,916} \approx 0,996$
Sachant que la bouteille a un bouchon, la probabilité qu'elle soit correctement remplie est égale à 0,996.

Partie B : Production journalière

1. La variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $\mu = 2000$ et $\sigma = 200$ et on cherche $P(X \in [1800;2200])$.
   Or $1800 = \mu - \sigma$ et $2200 = \mu + \sigma$ et on sait que $P\left(X \in [\mu - \sigma\,;\,\mu + \sigma]\right) \approx 0{,}683$ donc la probabilité que la production journalière soit comprise entre 1 800 et 2 200 bouteilles est approximativement de 0,683.
2. On demande $P(X < 1600)$; à la calculatrice, on trouve $P(X < 1600) \approx 0{,}023$.
   Donc la probabilité que le service de maintenance intervienne sur les machines est approximativement de 0,023.
   On peut aussi utiliser ce que l'on sait sur la courbe en cloche associée à une loi normale.
   On remarque d'abord que $1600 = 2000 - 2 \times 200 = \mu - 2\sigma$.
   D'après le rappel de cours, on sait que $P\left(X \in [\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]\right) \approx 0{,}954$, ce qui correspond à l'aire hachurée en rouge dans le dessin ci-dessous. Pour des raisons de symétrie, les deux aires en blanc sous la courbe sont égales et leur somme vaut $1 - 0{,}954 = 0{,}046$; chacune d'elle vaut alors la moitié de 0,046 soit 0,023.



Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

1. Le nombre de milliers d'insectes est donné par $f(t) = 25\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ où t est exprimé en années ; donc le nombre d'insectes au départ est $f(0) \times 1000 = 25000$, et le nombre d'insectes au bout d'un an est $f(1) \times 1000 \approx 15163$.
   Le pourcentage d'évolution est $\dfrac{15163 - 25000}{25000} \times 100 \approx -39{,}35$.
   Le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année est approximativement de 39 %.
2. **a.** La fonction F définie sur $[0\,;\,4]$ par $F(t) = -50\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ est une primitive de f si, pour tout t de $[0\,;\,4]$, $F'(t) = f(t)$.
   $F'(t) = -50 \times (-0{,}5)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 25\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = f(t)$
   Donc F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$.

   b. $\displaystyle\int_2^4 25\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{d}\,t = F(4) - F(2) = \left(-50\,\mathrm{e}^{-2}\right) - \left(-50\,\mathrm{e}^{-1}\right) = 50\,\frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}^2}$

   c. On calcule la valeur moyenne de la fonction f entre 2 et 4 :
   $\displaystyle\frac{1}{4-2}\int_2^4 25\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2} \times 50\,\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2} = 25\,\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2} \approx 5{,}814$
   La population moyenne d'insectes entre le début de la deuxième et le début de la quatrième année est de 5 814.

Partie B :

1. Si $g(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}1t^2} + t - 4{,}65$, alors :
   $g'(t) = 20 \times (-0{,}1 \times 2t)\,\mathrm{e}^{-0{,}1t^2} + 1 = -4t\,\mathrm{e}^{-0{,}1t^2} + 1$
2. On admet que la fonction g' est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4\,;\,10]$.
   $g'(4) = 1 - 16\,\mathrm{e}^{-1{,}6} \approx -2{,}23 < 0$ et $g'(10) = 1 - 40\,\mathrm{e}^{-10} \approx 0{,}998 > 0$
   On établit le tableau de variation de la fonction g' sur l'intervalle $[4;10]$:

t	4	α	10
$g'(t)$	$-2{,}23$ ↗	0 ↗	$0{,}998$

D'après le tableau de variation de g' on peut déduire que l'équation $g'(t) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[\![4\,;10]\!]$.

$\left.\begin{array}{l} g'(5) \approx -0{,}64 < 0 \\ g'(6) \approx 0{,}34 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [\![5\,;6]\!]$; $\left.\begin{array}{l} g'(5{,}5) \approx -0{,}07 < 0 \\ g'(5{,}6) \approx 0{,}03 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [\![5{,}5\,;5{,}6]\!]$

$\left.\begin{array}{l} g'(5{,}57) \approx -0{,}001 < 0 \\ g'(5{,}58) \approx 0{,}008 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [\![5{,}57\,;5{,}58]\!]$

Donc la valeur arrondie au dixième de α est 5,6.

On peut aussi faire référence au tableau de valeurs trouvé à la calculatrice pour donner ce résultat.

3. a. D'après le tableau de variation de la fonction g' sur $[\![4\,;10]\!]$, on peut dire que :

- $g'(t) < 0$ sur $[\![4\,;\alpha[\![$;
- $g'(t) = 0$ si $t = \alpha$;
- $g'(t) > 0$ sur $]\!]\alpha\,;10]\!]$.

b. On en déduit que :

- la fonction g est strictement décroissante sur $[\![4\,;\alpha]\!]$;
- la fonction g est strictement croissante sur $[\![\alpha\,;10]\!]$.

c. D'après les résultats des questions précédentes, on peut voir que le nombre d'insectes commence à remonter à partir de $t = \alpha$, c'est-à-dire à partir de la sixième année puisque $\alpha \approx 5{,}7$. Donc le traitement semble efficace sur la population d'insectes à partir de la sixième année.