∽ Baccalauréat Métropole, Antilles-Guyane, Maroc 21 mars 2023 ∾

Corrigé du Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

1. $P(A) = \dfrac{2}{5} \neq 0$, d'après la formule des probabilités conditionnelles on a :

   $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{10} = \boxed{\dfrac{7}{25}}$

2. $B = \overline{A}$ donc $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5} \neq 0$, d'après la formule des probabilités conditionnelles on a :

   $P_B(G) = \dfrac{P(B \cap G)}{P(B)} = \dfrac{P(G) - P(A \cap G)}{P(B)} = \dfrac{\dfrac{12}{25} - \dfrac{7}{25}}{\dfrac{3}{5}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ car (A, B) forme une partition de l'univers.

3. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées. Gagner ou perdre une partie forme un schéma de Bernoulli de paramètre $P(G) = \dfrac{12}{25}$. On répète l'expérience de manière identique et indépendante 10 fois. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{12}{25}$.

   On cherche ici à calculer $P(X = 6) = \dbinom{10}{6}\left(\dfrac{12}{25}\right)^6\left(\dfrac{13}{25}^4\right)\boxed{\approx 0,188}$

4. Ici on recherche n tel que $P(X \leqslant n) \approx 0,207$.

   Par balayage des valeurs de $n \in [\![0, 10]\!]$ on trouve $\boxed{n = 3}$

5. Ici on calcule $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dbinom{10}{0}\left(\dfrac{12}{25}\right)^0\left(\dfrac{13}{25}^{10}\right) = \boxed{1 - \left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}}$

Exercice 2 **5 points**

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

1. Augmenter de 60 % revient à multiplier par 1,6. La situation montre que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,1$ et de raison $1,6$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 0,1 \times 1,6^n}$

2. $1,6 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,6^n = +\infty$. Or $0,1 > 0$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

3. La question revient à résoudre $0,1 \times 1,6^n > 0,4$.

   $0,1 \times 1,6^n > 0,4$
   $\iff 1,6^n > 4 \qquad$ car $0,1 > 0$

$\iff n\ln(1,6) > \ln(4)$ car ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n > \dfrac{\ln(4)}{\ln(1,6)}$ car $1,6 > 1$ et donc $\ln(1,6) > 0$. Or $\dfrac{\ln(4)}{\ln(1,6)} \approx 2,95$

Donc l'entier recherché est $\boxed{n = 3}$

4. D'après ce modèle, l'équilibre du milieu naturel ne sera pas préservé car au bout de 3 mois, le nombre d'insectes dépassera 400 000.

Partie B : Étude d'un second modèle

1. On calcule $v_1 = v_{0+1} = 1,6v_0(1-v_0) = 1,6\times 0,1\times 0,9 = \boxed{0,144}$

2. **a.** On résout, sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \iff 1,6x^2 - 0,6x = 0 \iff x(1,6x - 0,6) = 0 \iff \boxed{x = 0} \text{ ou } \boxed{x = \dfrac{3}{8} = 0,375 < 0,5}$$

b. f est un polynôme du second degré avec $-1,6 < 0$ et $\dfrac{-1,6}{2\times(-1,6)} = \dfrac{1}{2}$ donc f est croissante sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$ donc sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ (et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$).

3. **a.** On montre par récurrence sur $\mathbb{N}$, la propriété $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$

Initialisation : pour $n = 0$ on a $v_0 = 0,1$ et $v_1 = 0,144$ donc $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.
La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Comme f est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, on a : $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Or $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,6\times\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2}) = 0,4 < 0,5$

Donc $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
La propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}}$

b. D'après la question précédente, (v_n) est croissante et majorée par $\dfrac{1}{2}$, d'après le **théorème de convergence monotone**, (v_n) est convergente vers un réel $\ell \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

c. f étant **continue** (polynômiale), et $v_{n+1} = f(v_n)$, donc ℓ est solution de $f(x) = x$, qui a pour solution 0 et 0,375. Or comme (v_n) est croissante, $\ell = 0,375 < 0,4$, donc l'équilibre du milieu naturel est préservé.

4. **a.** La limite de la suite (v_n) étant 0,375 et la suite étant croissante,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,1 \leqslant v_n \leqslant 0,375$, le programme ne termine pas si l'on entre 0,4 pour a.

b. Pour $a = 0.35$ la fonction renvoie 6. Au bout de 6 mois, le nombre d'insectes aura dépassé 350 000.

Exercice 3 **5 points**

1. **a.** D'après l'équation de $\mathscr{P}_1$, $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ en est un vecteur normal.

   b. On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 2\times1-1\times1-1\times1=0$ donc $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$
   Donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires

2. **a.** D'après $\overrightarrow{n_2}$, une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$ est de la forme $x-y+z+d=0$.
   Or $B(1;1;2)\in\mathscr{P}_2 \iff 1-1+2+d=0 \iff d=-2$.
   Donc une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$ est $x-y+z-2=0$

   b. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants. On vérifie que Δ est incluse dans les 2 plans, pour $t\in\mathbb{R}$:
   Pour $\mathscr{P}_1$: $2\times0-2+t-t+2=0$ et pour $\mathscr{P}_2$: $0-(-2+t)+t-2=0$.
   Donc Δ est l'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

3. **a.** Soit $t\in\mathbb{R}$, on a :
   $AM_t=\sqrt{(0-1)^2+(-2+t-1)^2+(t-1))^2}=\sqrt{1+t^2-6t+9+t^2-2t+1}=\sqrt{2t^2-8t+11}$

   b. Le projeté de A sur H réalise la distance minimale entre A et Δ.
   $t\longmapsto 2t^2-8t+11$ est un trinôme du second degré avec $2>0$ donc atteint son minimum en $t_0=\dfrac{8}{2\times2}=2$, or la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, le minimum de f est aussi atteint en $t_0=2$ et vaut $f(2)=\sqrt{2\times4-8\times2+11}=\sqrt{3}$ u.l.

4. **a.** La droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale à $\mathscr{P}_1$ donc un de ses vecteurs directeurs est $\overrightarrow{n_1}$, et passe par A donc une représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ est $\left\{\begin{array}{l}x=1+2t\\y=1+t\\z=1-t\end{array}\right.$ où $t\in\mathbb{R}$

   b. H_1 est l'intersection de la droite $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{P}_1$.
   Les coordonnées proposées de H_1 vérifient les équations de la droite $\mathscr{D}_1$ (avec $t=-\dfrac{2}{3}$) et de $\mathscr{P}_1$ car $-2\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}+\dfrac{6}{3}=0$.

5. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AH_1}$ et $\overrightarrow{H_2H}$: $\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}-1\\\frac{1}{3}-1\\\frac{5}{3}-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

   et $\overrightarrow{H_2H}\begin{pmatrix}0-\frac{4}{3}\\0-\frac{2}{3}\\2-\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\overrightarrow{H_2H}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AH_1}$ donc AH_1HH_2 est un parallélogramme.

   (AH) est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$, donc est orthogonale à toutes les droites incluses dans $\mathscr{P}_1$, comme par exemple (H_1H)

   Le parallélogramme AH_1HH_2 est bien un rectangle.

Exercice 4 **5 points**

1. **a.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\exp(x)=+\infty$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ or $\lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1$ or $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x) = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

La courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$

d. $-1 < 0$, et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $1+\mathrm{e}^x > 0$ donc $f' < 0$ et f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$+\infty$ $\quad$ $+\infty$
signe de f'	$-$
variation de f	$+\infty$ $\searrow$ 0

2. **a.** Calculons $f'(0) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^0} = \dfrac{-1}{2}$ et $f(0) = \ln(1+\mathrm{e}^0) = \ln(2)$ donc $T_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0) \iff$ $\boxed{y = -\dfrac{1}{2}x+\ln(2)}$

b. f' est le quotient de $x \mapsto -1$ constante et de la composée de exp et de $x \mapsto 1+x$ affine, toutes trois dérivables sur $\mathbb{R}$ et de plus $1+\mathrm{e}^x > 0$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ or $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'' > 0$ et donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe est au dessus de toutes ses tangentes, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}x+\ln(2)$

3. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f(x)-f(-x)+x = \ln(1+\mathrm{e}^{-x})-\ln(1+\mathrm{e}^{x})+\ln(\mathrm{e}^x) = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\times\mathrm{e}^x\right) = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) = \ln(1) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-f(-x) = -x$

b. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a $\overrightarrow{M_aN_a}\begin{pmatrix} a-(-a) \\ f(a)-f(-a)\end{pmatrix} = \overrightarrow{M_aN_a}\begin{pmatrix} 2a \\ -a\end{pmatrix}$ donc le coefficient directeur de la droite (M_aN_a) est $\dfrac{-a}{2a} = -\dfrac{1}{2}$ comme celui de la tangente T_0, donc ces droites sont bien parallèles.