Corrogé du baccalauréat Métropole 20 mars 2023

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.
On sait que :

- 20 % des machines sont sous garantie;
- 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie;
- 8,2 % des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.
On considère les évènements suivants :

- G : « la machine est sous garantie »;
- D : « la machine est défectueuse »;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de G et D.

1. La probabilité $p_G(D)$ de l'évènement D sachant que G est réalisé est égale à :

a. 0,002 **b.** 0,01 **c.** 0,024 **d.** 0,2

> 20 % des machines sont sous garantie donc $p(G) = 0,2$.
> 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie donc $p(G \cap D) = 0,002$.
> $p_G(D) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(G)} = \dfrac{0,002}{0,2} = 0,01$ **Réponse b.**

2. La probabilité $p\left(\overline{G} \cap D\right)$ est égale à :

a. 0,01 b. 0,08 **c.** 0,1 **d.** 0,21

> 8,2 % des machines sont défectueuses donc $p(D) = 0,082$.
> D'après la formule des probabilités totales : $p(D) = p(G \cap D) + p\left(\overline{G} \cap D\right)$. Donc :
> $p\left(\overline{G} \cap D\right) = p(D) - p(G \cap D) = 0,082 - 0,002 = 0,08$ **Réponse b.**

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

a. 0,01 **b.** 0,024 **c.** 0,082 **d.** 0,1

> On cherche : $p_D(G) = \dfrac{p(G \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,002}{0,082} \approx 0,024$ **Réponse b.**

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.
On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,082$.

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.
La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

a. 0,136 **b.** 0,789 **c.** 0,864 d. 0,924

$p(X>2)=1-p(X\leqslant 2)\approx 1-0,2114\approx 0,789$ **Réponse b.**

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0,4$.

La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5 **b.** 6 **c.** 10 d. 11

Si toutes les machines fonctionnent, le nombre de machines défectueuses est 0 ; donc on cherche le plus grand n tel que $p(X=0)>0,4$.

$p(X=0)=\binom{10}{0}\times 0,082^0\times(1-0,082)^n=0,918^n$

$$p(X=0)>0,4 \iff 0,918^n>0,4 \iff \ln\left(0,918^n\right)>\ln(0,4)$$
$$\iff n\times\ln(0,918)>\ln(0,4) \iff n<\frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)}$$

$\dfrac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)}\approx 10,71$ donc le plus grand entier n inférieur à $\dfrac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)}$ est 10. **Réponse c.**

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=x^2-8\ln(x)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. On détermine $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2=0\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln(x)=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2-8\ln(x)=+\infty\text{ et donc }\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$$

2. On admet que, pour tout $x>0$, $f(x)=x^2\left(1-8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0\text{ et donc }\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=1\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=+\infty\text{ et donc }\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

3. Calcul de la dérivée sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x)=2x-8\times\frac{1}{x}=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2\left(x^2-4\right)}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$$

4. Pour étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$f(2)=4-8\ln(2)$ On en déduit le tableau des variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
Signe de f'	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$4-8\ln(2)$	↗	$+\infty$

5. $4-8\ln(2) \approx -1,55 < 0$ donc on complète le tableau de variations.

x	0	α	2	$+\infty$
Variations de f	‖ $+\infty$	↘ 0 ↘	$4-8\ln(2)$	↗ $+\infty$

La fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ donc continue sur cet intervalle, donc continue sur $]0~;~2[$. Sur l'intervalle $]0~;~2[$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0~;~2[$. On l'appelle α.

6. On admet que, sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β. On complète le tableau de variations de f et on en déduit le signe de f sur $]0~;~+\infty[$.

x	0		α		2		β		$+\infty$
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$4-8\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de f	‖	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

7. Pour tout réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k$; donc $g_k(x) = f(x) + k$.

La fonction g_k a donc les mêmes variations que f et elle a donc pour minimum sur $]0~,~+\infty[$ le nombre $4-8\ln(2)+k$. Pour que g_k soit positive ou nulle, il faut que ce minimum soit positif ou nul, donc $4-8\ln(2)+k \geqslant 0$ soit $k \geqslant 8\ln(2)-4$.

Donc $8\ln(2)-4$ est la plus petite valeur de k telle que $g_k \geqslant 0$ sur $]0~;~+\infty[$.

EXERCICE 3 — 5 points

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.
Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par : $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$.

1. $u_2 = 0,9 \times u_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$ et $u_3 = 0,9 \times u_2 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$
   On peut estimer à 400 le nombre de questions le 2e mois, et à 490 le 3e mois.
2. On va montrer par récurrence la propriété $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 1$, on a $u_1 = 3$ et $13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - \dfrac{90}{9} = 3$.
     La propriété est vérifiée au rang 1.
   - **Hérédité**
     On suppose la propriété vraie au rang n avec $n \geqslant 1$; autrement dit $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$; c'est l'hypothèse de récurrence.
     $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3 = 0,9\left(13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n\right) + 1,3 = 0,9 \times 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 0,1 \times 13$
     $= 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$
     Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

   Donc pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :
   $u_{n+1} - u_n = \left(13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^{n+1}\right) - \left(13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n\right) = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^{n+1} - 13 + \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$
   $= \dfrac{100}{9} \times 0,9^n (1 - 0,9) = \dfrac{100}{9} \times 0,9^n \times 0,1 > 0$
   donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ est croissante.
4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.
   Ce programme renvoie la plus petite valeur n telle que $u_n >$ `p` ; donc `seuil(8.5)` renvoie la plus petite valeur n telle que $u_n > 8,5$. On résout cette inéquation.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

   $u_n > 8,5 \iff 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \iff 4,5 > \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$
   $\iff \dfrac{4,5 \times 9}{100} > 0,9^n \iff \ln(0,405) > \ln\left(0,9^n\right)$
   $\iff \ln(0,405) > n \times \ln(0,9) \iff \dfrac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)} < n$
   $\dfrac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)} \approx 8,6$ donc la valeur renvoyée par `seuil(8.5)` est 9.

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}$.
Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. $v_1 = 9 - 6\mathrm{e}^0 = 3$ et $v_2 = 9 - 6\mathrm{e}^{-0,19} \approx 4,04$

2. On résout l'inéquation $v_n > 8,5$.

$v_n > 8,5 \iff 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)} > 8,5 \iff 0,5 > 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)} \iff \dfrac{0,5}{6} > \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}$

$\iff \ln\left(\dfrac{0,5}{6}\right) > -0,19 \times (n-1) \iff -\dfrac{\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)}{0,19} < n$

Or $-\dfrac{\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)}{0,19} \approx 14,1$ donc la plus petite valeur telle que $v_n > 8,5$ est $n = 15$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

- Selon le 1er modèle, il y a plus de 850 questions sur la FAQ quand $u_n > 8,5$, c'est-à-dire le 9e mois.
- Selon le 2e modèle, il y a plus de 850 questions sur la FAQ quand $v_n > 8,5$, c'est-à-dire le 15e mois.

C'est la première modélisation qui conduit à procéder le plus tôt à cette modification.

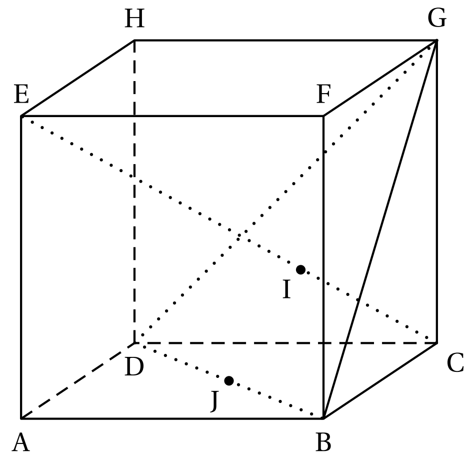
2. Pour savoir pour quelle modélisation il y a le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme, on cherche les limites des suites (u_n) et (v_n).

- $u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0,9^n$
  $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 13$.
  À long terme il y aura 1 300 questions pour la 1e modélisation..
- $v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} -0,19 \times (n-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)} = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 9$.
  À long terme il y aura 900 questions pour la 2e modélisation..

C'est donc pour la 1re modélisation qu'il y aura le plus de questions à long terme.

EXERCICE 4 **5 points**

On considère le cube ABCDEFCH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. On a : E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. La droite (EC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{EC}}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Donc la droite (EC) a pour représentation paramétrique;

$$\left\{\begin{array}{l c l}x&=&x_{\text{E}}+1\times t\\y&=&y_{\text{E}}+1\times t\\z&=&z_{\text{E}}+(-1)\times t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}\quad\text{soit}\left\{\begin{array}{l c l}x&=&t\\y&=&t\\z&=&1-t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$$

3. Les points G, B et D ne sont pas alignés donc (GDB) est un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{\text{GB}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$.

$\overrightarrow{\text{GB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{EC}}.\overrightarrow{\text{GB}}=1\times0+1\times(-1)+(-1)\times(-1)=0-1+1=0$ donc $\overrightarrow{\text{EC}}\perp\overrightarrow{\text{GB}}$

$\overrightarrow{\text{EC}}.\overrightarrow{\text{BD}}=1\times(-1)+1\times1+(-1)\times0=-1+1+0=0$ donc $\overrightarrow{\text{EC}}\perp\overrightarrow{\text{BD}}$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{EC}}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (GDB) donc la droite (EC) est orthogonale au plan (GDB).

4. **a.** La droite (EC) est orthogonale au plan (GDB) donc tout vecteur directeur de la droite (EC) est un vecteur normal au plan (GDB), en particulier le vecteur $\overrightarrow{\text{EC}}$ de coordonnées $(1~;~1~;~-1)$. Donc le plan (GDB) a une équation de la forme $x+y-z+d=0$ où d est un réel à déterminer.

Le point B appartient au plan (GDB) donc $x_{\text{B}}+y_{\text{B}}-z_{\text{B}}+d=0$; autrement dit : $1+0-0+d=0$ donc $d=-1$.

Le plan (GDB) a donc pour équation : $x+y-z-1=0$.

b. On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

Donc les coordonnées de I sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{r c l}x&=&t\\y&=&t\\z&=&1-t\\x+y-z-1&=&0\end{array}\right.$

On a donc : $t+t-(1-t)-1=0$ donc $t=\dfrac{2}{3}$.

On en déduit les coordonnées de I : $x_{\text{I}}=t=\dfrac{2}{3}$, $y_{\text{I}}=t=\dfrac{2}{3}$ et $z_{\text{I}}=1-t=\dfrac{1}{3}$, soit $\left(\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{1}{3}\right)$.

c. La droite (EC) est orthogonale au plan (GDB) donc la distance du point E au plan (GDB) est la longueur EI.

$\text{EI}^2=\left(\dfrac{2}{3}-0\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}-0\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2=\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{12}{9}$; donc $\text{EI}=\sqrt{\dfrac{12}{9}}=\dfrac{\sqrt{12}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

La distance du point I au plan (GDB) est donc de $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. **a.** Les côtés [BD], [DG] et [GB] du triangle BDG sont les diagonales respectives des carrés ABCD, CDHG et BCGF qui sont superposables; donc leurs diagonales ont la même longueur. Ce qui veut dire que le triangle BDG est équilatéral.

b. On appelle J le milieu du segment [BD] ; donc le segment [GJ] est la médiane issue de G dans le triangle BDG. Or ce triangle est équilatéral donc [GJ] est la hauteur issue de G dans ce triangle. L'aire du triangle BDG est donc : $\mathcal{A}=\dfrac{\text{BD}\times\text{GJ}}{2}$.

B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc J $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$\text{GJ}^2=\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2+(0-1)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{6}{4}$ donc $\text{GJ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

[BD] est la diagonale du carré ABCD de côté 1 donc BD $= \sqrt{2}$.

L'aire de BDG est donc : $\mathscr{A} = \dfrac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Le volume du tétraèdre EGBD est : $\dfrac{1}{3}\left(\mathscr{A} \times \text{EI}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$