# ~ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle–Calédonie ~ novembre 2003

**Exercice 1** **4 points**

**Commun tous les candidats**

1. L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale est $np$. Ici $\mathrm{E}(S_n) = np = 10$ donc $p = \dfrac{10}{n}$.

   Si $S_n$ est la variable aléatoire totalisant le nombre d'accidents, on a

   $\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^k = \binom{n}{k}\left(\dfrac{10}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{10}{n}\right)^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. **a.** On en déduit que $[\mathrm{P}(S_n = 0)] = \binom{n}{0}p^0(1-p)^n = \left(1-\dfrac{10}{n}\right)^n$.

   En supposant $n > 10$, on obtient, en prenant le logarithme

   $\ln[\mathrm{P}(S_n = 0)] = n\ln\left(1-\dfrac{10}{n}\right) = \dfrac{-10}{-10} \times \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{10}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{10}{n}\right)}{\dfrac{-10}{n}}$.

   En posant $h = -\dfrac{10}{n}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h = 0$ et on sait que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln[\mathrm{P}(S_n = 0)] = -10$ et par continuité de la fonction exponentielle : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n = 0) = \mathrm{e}^{-10}$.

   **b.** $\mathrm{P}(S_n = k+1) = \binom{n}{k+1}\left(\dfrac{10}{n}\right)^{k+1}\left(1-\dfrac{10}{n}\right)^{n-k-1} =$

   $\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\left(\dfrac{10}{n}\right)^{k+1}\left(1-\dfrac{10}{n}\right)^{n-k-1} =$

   $\dfrac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}\left(\dfrac{10}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{10}{n}\right)^{n-k}\dfrac{\frac{10}{n}\times n}{\left(1-\frac{10}{n}\right)\times n} = \mathrm{P}(S_n = k) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$.

   **c.** On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n-k}{n-10} = 1$ (problème si $k = n!$).

   Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}\times\dfrac{10}{k+1} = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.

   **d.** • Initialisation : la propriété est vraie pour $k = 0$ (démontré au **a.**)

   • Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ ;

   — soit $k+1 \leqslant n$ et on a démontré au **c.** que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n = k+1) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ et la relation est vraie au rang $k+1$,

   — soit $k+1 > n$ et la relation est vraie.

   Conclusion : pour tout $k \leqslant n$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$.

3. On considère donc que $\mathrm{P}(S_n = k) \approx \mathrm{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$.

   On a donc $\mathrm{P}(S_n \geqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(S_n = 0) - \mathrm{P}(S_n = 1) - \mathrm{P}(S_n = 2) \approx 1 - \mathrm{e}^{-10} - 10\mathrm{e}^{-10} - 50\mathrm{e}^{-10} \approx 1 - 61\mathrm{e}^{-10} \approx 0{,}997\,231$.

**Exercice 2 : enseignement obligatoire** **5 points**

1. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\,(-3~;~0~;~5)$, et $M(x~:~y~;~z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \iff$
$\begin{cases} x &= 3-3\lambda \\ y &= 0 \\ z &= 10+5\lambda \end{cases}$

   **b.** Si $M(x~:~y~;~z) \in (AB)$ et $M$ coupe l'axe des abscisses en E, alors $z_E = 10+5\lambda = 0 \iff \lambda = -2$ ; d'où $x = 9$. Donc E$(9~;0~;0)$.

   **c.** $C \in (AB) \iff \begin{cases} 0 &= 3-3\lambda \\ 20 &= 0 \\ 0 &= 10+5\lambda \end{cases}$. La deuxième égalité est fausse ; A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** (OH) hauteur dans OBC, donc $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$. D'autre part $\overrightarrow{BC}\,(0~;~20~;~-15)$ et $\overrightarrow{OE}\,(9~;~0~;~0)$, d'où $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.
Or $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OH}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0+0 = 0$, donc (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

   **b.** D'après le **a.** $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal au plan (OEH). Une équation de ce plan est donc $20y-15z+d = 0$, mais O appartient à ce plan donc $d = 0$. Une équation réduite est donc : $M(x~:~y~;~z) \in (OEH) \iff 4y-3z = 0$.

   **c.** Pour A on a $60+120-180 = 0$, pour B $180-180 = 0$ et pour C $180-180 = 0$ égalités toutes vraies. D'après **1. c.** les points A, B et C ne sont pas alignés, donc l'équation proposée $20x+9y+12z-180 = 0$ est bien une équation du plan ABC.

   **d.** $\begin{cases} x &= 0 \\ 4y-3z &= 0 \\ 20x+9y+12z-180 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ 4y-3z &= 0 \\ 9y+12z-180 &= 0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} x &= 0 \\ 16y-12z &= 0 \\ 9y+12z-180 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ 16y-12z &= 0 \\ 25y-180 &= 0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} x &= 0 \\ 16y-12z &= 0 \\ z &= \frac{36}{5} \end{cases}$. On en déduit que $z = \dfrac{48}{5}$. Le système a bien une solution unique.
$x = 0$ est une équation du plan (OBC) ; $4y-3z = 0$ une équation du plan (OEH) (cf. **2. b.**) et $20x+9y+12z-180 = 0$ est une équation du plan (ABC) (cf. **2. c.**). Donc ces trois plans ont un seul point commun de coordonnées $\left(0~;~\dfrac{36}{5}~;~\dfrac{48}{5}\right)$. Ce point est le point H qui appartient aux trois plans.

   **e.** $OH^2 = \left(\frac{36}{5}\right)^2+\left(\frac{48}{5}\right)^2 = 144$. D'où $OH = 12$.
Or $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OE} = 0$ entraîne que OEH est rectangle en O et $EH^2 = EO^2+OH^2 = 81+144 = 225$. Donc $EH = 15$.
Enfin l'aire du triangle EBC est égale $\dfrac{BC\times EH}{2} = \dfrac{25\times 15}{2} = \dfrac{375}{2}$. (On a $\overrightarrow{BC}\,(0~;~20~;~-15)$, donc $BC^2 = 400+225 = 625$, d'où $BC = 25$.)

3. En prenant comme base le triangle EOC, la hauteur est [OB]. Le volume du tétraèdre est donc $V = \dfrac{\frac{1}{2}\times 20\times 9}{3}\times 15 = 450$.
En prenant comme base le triangle EBC, soit O′ le projeté orthogonal de O sur cette base. On a $V = \dfrac{OO'\times\frac{25\times 15}{2}}{3}$. En égalant les volumes $450 = \dfrac{125\times OO'}{2} \iff OO' = \dfrac{36}{5}$.

On a donc $d(\text{O},\ (\text{ABC})) = \dfrac{36}{5}$.

Or on sait que $d(\text{O},\ (\text{ABC})) = \dfrac{|20\times 0+9\times 0+12\times 0-180|}{\sqrt{20^2+9^2+12^2}} = \dfrac{36}{5}$ (en utilisant le **2. c.**).

**Exercice 2 : enseignement de spécialité** **5 points**

**1. a.** De trois choses l'une :

- $p = 3k, k \in \mathbb{N}$ : terminé, seul le premier est multiple de 3 ;
- $p = 3k+1$, donc $p+20 = 3k+21 = 3(k+7)$ : terminé, seul le troisième est multiple de 3 ;
- $p = 3k+2$, d'où $p+10 = 3k+12 = 3(k+4)$ : terminé, seul le deuxième est multiple de 3.

**b.** D'après la question précédente l'un seulement des trois naturels est multiple de 3 ; le seul multiple de 3 premier est 3 et ce nombre doit être le premier terme de la suite.

Conclusion : les trois nombres sont : 3 ; 13 et 23.

**2.** $3u+13v+23w = 0$.

**a.** $3u+13v+23w = 0 \iff 3u+3v+3w+10v+20w = 0 \iff 10v+20w = -3(u+v+w) \iff 10v+20w \equiv 0 \quad [3] \iff 10v \equiv -20w \quad [3] \iff$
$9v+v \equiv -21w+w \quad [3] \iff v \equiv w \quad [3]$

**b.** On a donc $3u+13v+23w = 0 \iff 3u+13(3k+r)+23\left(3k'+r\right) = 0 \iff$
$3\left(u+13k+23k'\right)+36r = 0 \iff u+13k+23k'+12r = 0 \iff$
$u = -13k-23k'-12r$.

Les triplets solutions sont donc de la forme :

$$(u\ ;\ v\ ;\ w) = (-13k-23k'-12r\ ;\ 3k+r\ ;\ 3k'+r)$$

**c.** Les coordonnées des points cherchés sont les triplets précédant, avec $-\dfrac{5}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}$, $-\dfrac{5}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{5}{2}$, $-\dfrac{5}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{5}{2}$.

- Si $k = 0$, la seule possibilité est $k = k' = 0$ : le point O(0 ; 0 ; 0) est solution ;
- Si $k = 1$ :
  — avec $k = 0$ et $k' = 0$, mais $(-12\ ;\ 1\ ;\ 1)$ n'est pas solution ;
  — avec $k = 0$ et $k' = -1$, mais $(11\ ;\ 1\ ;\ -2)$ n'est pas solution ;
  — avec $k = -1$ et $k' = 0$, on trouve A$(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ qui est solution ;
  — avec $k = -1$ et $k' = -1$, on trouve $(24\ ;\ -2\ ;\ -2)$ qui n'est pas solution.
- Si $k = 2$ :
  — avec $k = 0$ et $k' = 0$, le point $(-24\ ;\ 2\ ;\ 2)$ n'est pas solution ;
  — avec $k = 0$ et $k' = -1$, le point B$(-1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ est solution ;
  — avec $k = -1$ et $k' = 0$, le point $(-11\ ;\ -1\ ;\ 2)$ n'est pas solution :
  — avec $k = -1$ et $k' = -1$, le point $(12\ ;\ -1\ ;\ -1)$ n'est pas solution.

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A**

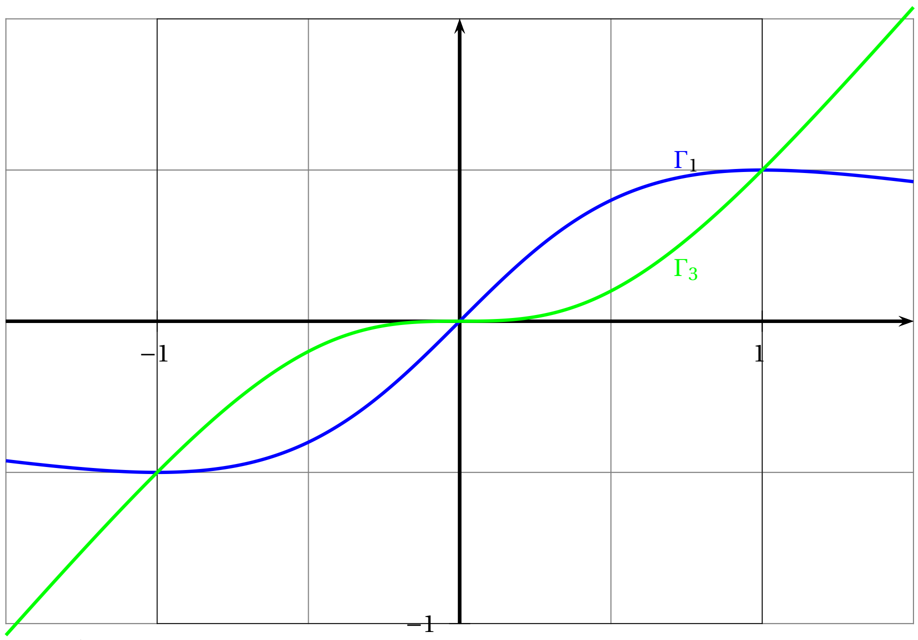
**1. a.** $f_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+x}$ ; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}+x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

Il en résulte que l'axe des abscisses est asymptote à la représentation graphique de $f_1$ au voisinage de $+\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ avec la même conséquence graphique.

**b.** $f_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas et :
$f_1'(x) = \dfrac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ qui est du signe du numérateur le dénominateur étant positif.
Donc $f_1'(x)$ est négative sauf entre $-1$ et 1.
La fonction est donc :
— décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et sur $[1\,;\,+\infty[$,
— croissante sur $[-1\,;\,+1]$.

**c.** Tracé de $\Gamma_1$ :




**d.** $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$

**2. a.** $f_3(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.
Pour $x \neq 0$, on peut écrire $f_3(x) = \dfrac{x}{\frac{1}{x^2}+1}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}+1 = 1$,
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$.

**b.** $f_3$ quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f_3'(x) = \dfrac{3x^2\left(1+x^2\right)-2x^4}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{3x^2+x^4}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\times\left(3+x^2\right)$ positive car tous les termes le sont.
La fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

**3.** $\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\frac{1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$
Par différence on en déduit que $\mathrm{I}_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$.

**4.** On sait que sur $[0;\,1]$, $x \geqslant x^3$, donc sur $[0;1]$, $f_1(x) \geqslant f_3(x)$. Donc l'aire du domaine situé entre $\Gamma_1$ et $\Gamma_3$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est égal à :

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_3 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

**Partie B**

**1.** **a.** $f_0(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On a de façon évidente $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim_{x\to-\infty} f_0(x) = 0$.
l'axe des abscisses est donc asymptote au graphe $\Gamma_0$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

**b.** $f_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_0'(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ qui est du signe de $-x$.

La fonction $f_0$ est donc :
— croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ ;
— décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**2.** $a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

**a.** La fonction $f_0$ est positive; $a_n$ représente donc la mesure de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\Gamma_0$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$.

**b.** Par linéarité de l'intégrale : $a_{n+1} - a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, intégrale positive puisque intégrale d'une fonction positive avec $n < n+1$. La suite est donc croissante.

**c.** Comme $t^2 > 0,\ 1 < 1+t^2 \iff \dfrac{1}{1+t^2} < 1$.

En intégrant ces deux fonctions positives entre 0 et 1, on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t < \int_0^n 1\,\mathrm{d}t \iff a_1 < 1$.

**d.** Quel que soit le réel $t,\ t^2 \geqslant 0$.Donc $t^2 < 1+t^2 \iff \dfrac{1}{1+t^2} < \dfrac{1}{t^2}$.
En intégrant ces deux fonctions positives on obtient l'inégalité
$\displaystyle\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \int_1^n \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \iff \int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n \iff$
$\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < 1 - \frac{1}{n}$.

**e.** On a $a_n = a_1 + \displaystyle\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, d'où en utilisant les résultats des deux questions précédentes :
$a_n < 1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \iff a_n < 2 - \dfrac{1}{n}$.
Conclusion : quel que soit $n$ : $a_n \leqslant 2$.
On peut donc dire que la suite $(a_n)$ est croissante et majorée par 2 : elle est donc convergente vers un réel inférieur ou égal à 2.

**Partie C**

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ F(0) = 0.$$

**1.** Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F[\tan(x)]$

**a.** $H(0) = F[\tan(0)] = F(0) = 0$ (par définition)

**b.** La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $F$ est dérivable comme fonction composée de deux fonctions dérivables et $H'(x) = F'[\tan x] \times (\tan x)' = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} \times \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \times \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1$.
Donc une primitive de $H'(x)$ est $x+K$ et comme $H(0) = 0$, il en résulte que $K = 0$.
Conclusion : pour tout $x$ de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.

**c.** On a par définition $H(x) = F[\tan x]$, donc si $x = \dfrac{\pi}{4}$, $\tan x = 1$ et $F[1] = H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

**2.** $k(x) = F\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.

**a.** $k$ est dérivable comme somme de fonctions composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et $k'(x) = F'\left(\dfrac{1}{x+1}\right) \times \left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) + F'\left(\dfrac{x}{x+2}\right) \times \left(\dfrac{2}{(x+2)^2}\right) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{(x+2)^2}} \times \left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) + \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2} \times \dfrac{2}{(x+2)^2} = \dfrac{-1}{(x+1)^2+1} + \dfrac{2}{(x+2)^2+x^2} = \dfrac{-1}{x^2+2x+2} + \dfrac{2}{2x^2+4x+4} = \dfrac{-1}{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{x^2+2x+2} = 0$.
Conclusion : la fonction $k$ est constante.

**b.** On a $k(0) = F(1) + F(0) = \dfrac{\pi}{4} + 0 = \dfrac{\pi}{4}$.

D'autre part $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right) = k(1)$.

Conclusion : $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.