∽ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle–Calédonie ∾
novembre 2004

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. **a.** Soit $z_A = 1 - i$; alors $z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = 1 - 1 - 2i - 4 + 4i = -4 + 2i$.
$z_B = 3 + i$; alors $z_{B'} = (3+i)^2 - 4(3+i) = 9 - 1 + 6i - 12 - 4i = -4 + 2i = z_{A'}$.

   b. Supposons que z_1 et z_2 aient la même image par f, alors :
$z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \iff z_1^2 - z_2^2 - 4z_1 + 4z_2 = 0 \iff$
$(z_1 + Z_2)(z_1 - z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0 \iff (z_1 - z_2)[z_1 + z_2 - 4] = 0 \iff$
$\begin{cases} z_1 - z_2 &= 0 \\ z_1 + z_2 - 4 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 &= z_2 \\ z_1 + z_2 &= 4 \end{cases}$
Conclusion : si deux points ont la même image :
— ou ils sont égaux ;
— ou ils sont symétriques autour du point d'affixe 2 (car $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = 2$).

2. Soit I le point d'affixe -3.

   a. OMIM' est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales [OI] et $[MM']$ ont le même milieu soit si $-\dfrac{3}{2} = \dfrac{z + z'}{2} \iff$
$-3 = z + z' \iff -3 = z + z^2 - 4z \iff z^2 - 3z + 3 = 0$.

   b. $z^2 - 3z + 3 = 0 \iff \left(z - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + 3 = 0 \iff$
$\left(z - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0 \iff \left(z - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$.
D'où les deux solutions : $z_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

3. **a.** $(z' + 4) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$. De cette égalité il découle :
— en égalant les modules $|z' + 4| = \left|(z-2)^2\right| = |z-2|^2$,
— en égalant les arguments $\arg(z' + 4) = \arg\left[(z-2)^2\right] = 2\arg(z-2)$.

   b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Si un point M appartient cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon 2, alors $|z-2| = 2$; d'après la question précédente son image M' a une affixe z' telle que $|z' + 4| = |z-2|^2 = 2^2 = 4$: ceci signifie que M' appartient au cercle $(\mathscr{C}')$ de centre K et de rayon 4.

   c. $z_E = -4 - 3i$. Donc $(z_E + 4) = -4 - 3i + 4 = -3i = 3e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
D'après la question **3. a.** il résulte que $\arg(z-2) = -\dfrac{\pi}{4}$.
De $(z'+4) = (z-2)^2$ il découle que ou $z - 2 = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ou $z - 2 = -\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}}$, soit $2 + \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ou $2 - \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ou encore $z_1 = 2 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ou $z_2 = 2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
L est le barycentre de {(A, 1) ; (B, 3)}.
Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1. Par définition de L, $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de L sont : $\left(\dfrac{3}{4} ; 0 ; 0\right)$. Réponse : **b.**

2. Le point L appartient de façon évidente à (π)Le plan (π) ; le point G(1 ; 1 ; 1) aussi $(4-4+3-3=0)$; le point E(0 ; 0 ; 1) aussi ; mais pas le point $\text{J}\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ (car $4-2+3-3=0$ est fausse) ; enfin A n'appartient pas au plan (π). Conclusion (π) est le plan (GLE). Réponse : **a.**
3. Un plan parallèle à (π) a une équation de la forme : $4x-4y+3z+d=0$; $\text{I}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)\in(\pi) \iff 2-0+3+d=0 \iff d=-5$.
   La droite (FB) a pour équations : $x=1$ et $y=0$; en reportant dans l'équation du plan on obtient $4+3z-5=0 \iff z=\frac{1}{3}$. Le point M a donc pour coordonnées $\left(1\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$. Réponse : **c.**
4. On a $\overrightarrow{\text{EL}}\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,-1\right)$ qui est colinéaire au vecteur $(3\,;\,0\,;\,-4)$. Une équation de la droite (EL) est donc : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t\\ y & = & 0\\ z & = & 1-4t\end{array}\right.$ $t\in\mathbb{R}$. Un système d'équations de la droite (FB) est $x=1$ et $y=0$. En remplaçant dans les équations de (EL), on obtient $1=3t \iff t=\dfrac{1}{3}$ et finalement les coordonnées de N sont $\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{1}{3}\right)$ qui est bien le symétrique de M autour de B.
   On a $\overrightarrow{\text{IM}}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,-\frac{2}{3}\right)$ qui est colinéaire au vecteur $(3\,;\,0\,;\,-4)$ donc au vecteur $\overrightarrow{\text{IM}}$.
   Réponses : **a.** et **b.**
5. On prend comme base du tétraèdre FIJM le triangle rectangle FIM, avec FI $=\dfrac{1}{2}$, FM $=\dfrac{2}{3}$ et comme hauteur FJ $=\dfrac{1}{2}$:
   Le volume est donc égal à $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{36}$.
   Réponse : **a.**

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

$$f(x)=\frac{x}{\text{e}^x-x}.$$

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\text{e}^x-x-1$.

1. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et
   $g'(x)=\text{e}^x-1$. Comme $\text{e}^0\ =1$, $\text{e}^x>1$, si $x>0$ on en déduit le signe de $g'(x)$ donc les variations de g Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   — g est décroissante de $+\infty$ à 0 sur $]-\infty\,;\,0]$;
   — $g(0)=0$;
   — g est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$
   g a donc un minimum 0 pour $x=0$.
   Conclusion : Quel que doit $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geqslant 0$.
2. De la question précédente il résulte que $\text{e}^x-x-1\geqslant 0 \iff (\text{e}^x-x)\geqslant 1>0$.

Partie B

1. **a.** — Pour $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{1}{\frac{\text{e}^x}{x}-1}$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{e}^x}{x}=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

— Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

b. Les résultats précédents montrent que l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$ et que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

2. a. D'après **A. 2.** le dénominateur de f n'est pas nul : f est donc dérivable et $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - x - x\mathrm{e}^x + x}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$.

Comme e^x et $\mathrm{e}^x - x$ sont supérieurs à zéro, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

b. Si $x < 1$, $f'(x) > 0$ et f est croissante ;
Si $x > 1$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante.

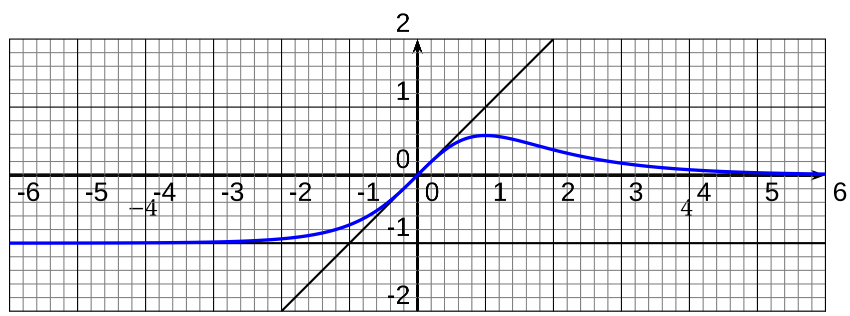
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	
$f(x)$	-1		0		$\frac{1}{\mathrm{e}-1}$		0

3. a. On a $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$.
$M(x\,;\,y) \in (\mathrm{T}) \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y = x$.

b. La courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (T) $\iff \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x} > x \iff x > x(\mathrm{e}^x - x) \iff x(\mathrm{e}^x - x - 1) < 0 \iff x < 0$, car on a vu à la question **A. 1.** que $\mathrm{e}^x - x - 1 > 0$.

On obtient de manière analogue que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessous de la droite (T) si $x > 0$.

4.



EXERCICE 3 **5 points**
Exercice de spécialité

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Supposons qu'il existe un diviseur commun d à a et à b. Il existe donc a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.

L'égalité $au + bv = 1$ peut s'écrire $da'u + db'v = 1 \iff d(a'u + b'v) = 1$.

Ceci montre que d divise 1, donc $d = 1$, ce qui montre que a et b sont premiers entre eux.

b. $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ peut s'écrire $a \times a + b(a - b) = 1$. Avec $u = a$ et $v = b - a$, ceci montre d'après le cours que a et b sont premiers entre eux.

2. **a.** Lorsque $a = b$, l'égalité s'écrit $\left(a^2 + a^2 - a^2\right)^2 = 1 \iff a^4 = 1 \iff a = 1$.

   b. On vient de voir que $(1\,;\,1)$ est un couple solution.
   Si $a = 2,\ b = 3$, alors $(4+6-9)^2 = 1^2 = 1$, donc $(2\,;3)$ est un couple solution.
   Si $a = 5, b = 8$, alors $(25 + 40 - 64)^2 = 1^2 = 1$, donc $(5;\,8)$ est un couple solution..

   c. $(a\,;\,b)$ est solution donc $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ et si $a < b \iff a - b < 0$, alors $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$ car $a + b$ somme de deux positifs est positif.

3. **a.** Si $(x\,;\,y)$ est une solution avec $xy \neq 1$ alors $\left(x^2 + xy - y^2\right)^2 = 1 \iff x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 2xy^3 = 1$.
   Calculons $\left[(y-x)^2 + x(y-x) - x^2\right]^2 = \left(y^2 + x^2 - 2xy + xy - x^2 - x^2\right)^2 = \left(y^2 - x^2 - xy\right)^2 = y^4 + x^2y^2 + x^4 - 2xy^3 - 2x^2y^2 + x^3y = 1$ (d'après l'égalité ci-dessus.
   De même calculons $\left(y^2 + y(y+x) - (y+x)^2\right)^2 = \left(y^2 + xy - x^2 - 2xy\right)^2 = \left(y^2 - x^2 - xy\right)^2$ que l'on vient de calculer et qui est égal à 1.
   Si $(x\,;\,y)$ est un couple solution, alors $(y - x\,;\,x)$ et $(y\,;\,y + x)$ en sont deux autres

   b. De de **2. b.** et **3. a.** on en déduit que le couple $(2;3)$ fournit les couples $(1;2)$ et $(3;5)$ et que le couple solution $(5;8)$ donne les couples $(3;5)$ (déjà trouvé) et $(8;\,13)$ solutions.

4. Démonstration par récurrence :
   — Initialisation : le couple $(a_0\,;\,a_1) = (1\,;\,1)$ est solution;
   — Hérédité : supposons que le couple de rang n, $(a_n\,;\,a_{n+1})$ soit solution.
   De la question **3. a.** il résulte que le couple $(a_{n+1}\,;\,a_{n+1} + a_n) = (a_{n+1}\,;\,a_{n+2})$ est aussi solution.
   On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, les couples $(a_n\,;\,a_{n+1})$ sont des couples solutions.
   D'après la question **1. b.** les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.
   Les premiers nombres de la suite (de Fibonacci) sont 1; 1; 2; 3; 5; 8 13; 21; … : deux termes consécutifs sont premiers entre eux.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. $u_1 = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$, $v_1 = \dfrac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \dfrac{15}{4}$, $u_2 = \dfrac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{29}{8}$ et $v_2 = \dfrac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{59}{16}$.

2. Soit la suite $w_n = v_n - u_n$.

   a. Calculons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} = \dfrac{u_{n+1} + v_n - 2u_{n+1}}{2} = \dfrac{v_n - u_{n+1}}{2} = \dfrac{v_n - \dfrac{u_n + v_n}{2}}{2} = \dfrac{v_n - u_n}{4} = \dfrac{1}{4}w_n$.
   La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   b. On sait que $w_n = w_0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$; or $w_0 = 4 - 3 = 1$.
   Donc $w_n = \dfrac{1}{4^n}$.
   Comme la raison $\dfrac{1}{4}$ est comprise entre 0 et 1, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0_+$.

3. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{w_n}{2} > 0$, car la suite (w_n) est positive.

   La suite (u_n) est donc croissante.

   De même $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \dfrac{\dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = -\dfrac{1}{4}(v_n - u_n) = -\dfrac{1}{4} w_n < 0$.

   La suite (v_n) est donc décroissante.

   D'autre part la différence $v_n - u_n$ égale à w_n a pour limite 0.

   Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles ont donc la même limite ℓ.

4. Soit $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

   a. On a $t_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \dfrac{\frac{u_n+v_n}{2} + u_{n+1} + v_n}{3} = \dfrac{u_n + v_n + 2v_n + u_n + v_n}{6} = \dfrac{2u_n + 4v_n}{6} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$.

   La suite (u_n) est donc constante et $t_n = t_0 \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{11}{3}$.

   b. De $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$, on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{11}{3} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = \ell$.

   Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{11}{3}$.