

## ∞ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 16 novembre 2012 ∞

## EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

## Partie A

1. a.  $f$  est une somme de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 5 \times \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{5-x-3}{x+3} = \frac{2-x}{x+3}.$$

$$\text{Or } x \geq 0 \Rightarrow x+3 \geq 3 > 0.$$

$$\bullet \quad 2-x > 0 \iff x < 2.$$

$$\bullet \quad 2-x < 0 \iff x > 2.$$

$$\bullet \quad 2-x = 0 \iff x = 2.$$

- b. - La fonction  $f$  est croissante sur  $[0; 2[$ .  
 - La fonction  $f$  est décroissante sur  $]2; +\infty[$ .  
 -  $f(2) = 5\ln(5) - 2 \approx 4,047$  est le maximum de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .  
 On a le tableau de variations suivant :

$x$	0	2	α	+∞
$f(x)$		$5\ln(5) - 2$		
	$5\ln 3$	↗	↘	$-\infty$

- c. Comme  $x > 0$ , on peut factoriser :

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x = 5\ln\left[x\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right] - x = 5\ln x + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) - x = 5\ln x - x + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) =$$

$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

- d. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , donc que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \ln 1 = 0$ , donc finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \times (-x) = -\infty.$$

$$\text{D'autre part } f(0) = 5\ln 3.$$

- e. Voir le tableau plus haut.
2. a. Sur l'intervalle  $]2; +\infty[$ ,  $f$  est strictement décroissante de  $f(2) > 0$  à  $-\infty$ . Il existe donc un réel unique  $\alpha > 2$ , tel que
- $$f(\alpha) = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0.$$
- b.  $f(14) = 5\ln 17 - 14 \approx 0,17 > 0$  et  $f(15) = 5\ln 18 - 15 \approx -0,55 < 0$ , donc  $14 < \alpha < 15$ .  
 La calculatrice livre :
- $$f(14,2) = 5\ln(17,2) - 14,2 \approx 0,02 > 0 \text{ et}$$
- $$f(14,3) = 5\ln(17,3) - 14,3 \approx -0,05 < 0, \text{ donc}$$

$$14,2 < \alpha < 14,3.$$

- c. Le tableau de variations montre donc que :

$$- \quad f(x) > 0 \text{ sur } [0; \alpha[;$$

$$- \quad f(x) < 0 \text{ sur } ]\alpha; +\infty[;$$

$$— f(\alpha) = 0.$$

### Partie B

1. a. Voir l'annexe 1
- b. La suite semble être croissante.
2. a. La fonction  $g$  a même sens de variation que la fonction  $\ln$ , soit croissante; on peut également calculer  $g'(x) = \frac{5}{x+3} > 0$  comme quotient de deux nombres supérieurs à zéro.
- b. On a vu dans la partie que  $f(\alpha) = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) = \alpha \iff g(\alpha) = \alpha$ .
- c. *Initialisation* : On a  $0 \leq 4 \leq \alpha$  : l'encadrement est vrai au rang 0;  
*Hérédité* : Supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $0 \leq u_n \leq \alpha$   
 Comme la fonction  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  donc en particulier sur  $[0; \alpha]$ , on a donc :  
 $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha)$  c'est-à-dire  
 $5\ln 3 \leq u_{n+1} \leq \alpha$  (d'après la question précédente).  
 On a donc *a fortiori* :  $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .  
 L'encadrement est vrai au rang  $n+1$ .  
 L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai au rang  $n$ , il l'est aussi au rang  $n+1$ . On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq u_n \leq \alpha.$$

- d. On a vu que sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ ,  $f(x) > 0$  sur  $[0; \alpha]$ , donc pour tout  $u_n$  tel que  $0 \leq u_n \leq \alpha$ ,  $\ln(u_n+3) - u_n > 0 \iff \ln(u_n+3) > u_n \iff g(u_n) > u_n \iff u_{n+1} > u_n$ , ce qui démontre que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
 Cette suite est croissante et majorée par  $\alpha$  : elle converge donc vers une limite  $\ell$  telle que  $\ell \leq \alpha$ .
- e. La relation  $u_{n+1} = 5\ln(u_n+3)$  donne par continuité de la fonction dérivable  $g$  et par limite en plus l'infini :  
 $\ell = \ln(\ell+3) \iff \ln(\ell+3) - \ell = 0 \iff f(\ell) = 0$ .  
 Or on a vu à la question 2. a. de la partie A que  $\alpha$  est la seule solution de l'équation  $f(x) = 0$  sur  $[0; +\infty[$ . Conclusion  $\ell = \alpha$ .  
 On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .
3. a. Cet algorithme calcule successivement  $u_1, u_2, \dots$ . On a vu que cette suite converge vers le nombre  $\alpha$  supérieur à 14,2. La condition  $u - 14,2 < 0$  sera donc réalisée et l'algorithme affichera la première valeur de la suite supérieure à 14,02.
- b. Il suffit de taper sur la calculatrice :  
 $u_0 = 4$  Entrée  
 $5 \star \ln(\text{ANS}(1) + 3)$  Entrée  
 Entrée, etc  
 On obtient  $u_6 \approx 14,223\,15 > 14,2$ .

### EXERCICE 2

4 points

#### Commun à tous les candidats

### Partie A

1. Les trois tirages sont indépendants, et à chaque tirage la probabilité de tirer une boule rouge est égale à  $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$  : on a donc une épreuve de Bernoulli et la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = \frac{2}{5}$ .

2. La probabilité de tirer  $k$  ( $0 \leq k \leq 3$ ) boule(s) rouge(s) est égale à

$$p(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{3-k} \quad (\star).$$

$$\text{En particulier : } p(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3^2}{5^2} = \frac{54}{125}.$$

3. On sait que  $E(X) = n \times p = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$ .

Vérification : on calcule avec la formule ( $\star$ ) :

$$p(X = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125};$$

$$p(X = 2) = \frac{3!}{2!} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125};$$

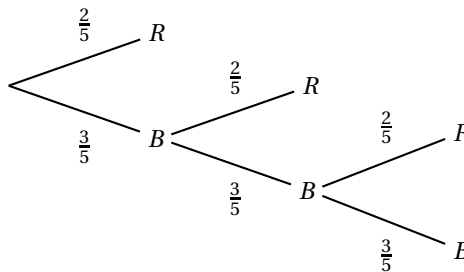
$$p(X = 3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}.$$

$$\text{On a donc } E(X) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{54 + 72 + 24}{125} = \frac{150}{125} = \frac{6}{5}.$$

Sur un grand nombre de tirages on tirera un peu plus d'une boule rouge en moyenne par tirage (en moyenne 150 boules rouges sur 125 tirages).

## Partie B

1.



$$2. \text{ On a } p(Y = 1) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{6}{25} + \frac{18}{125} = \frac{50 + 30 + 18}{125} = \frac{98}{125}.$$

$$p(Y = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125}.$$

$$\text{Donc } E(Y) = 1 \times \frac{98}{125} + 0 \times \frac{27}{125} = \frac{98}{125}.$$

3. Toujours d'après l'arbre :  $p(N = 1) = \frac{2}{5}$ ;  $p(N = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$  et  $p(N = 3) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ .

$$\text{On a donc } E(N) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{6}{25} + 3 \times \frac{9}{25} = \frac{2}{5} + \frac{12}{25} + \frac{27}{25} = \frac{10 + 12 + 27}{25} = \frac{49}{25}.$$

4. On a  $\frac{E(Y)}{E(N)} = \frac{\frac{98}{125}}{\frac{49}{25}} = \frac{98}{125} \times \frac{25}{49} = \frac{2}{5}$ , soit la proportion de boules rouges dans l'urne.

## EXERCICE 3

5 points

### Commun à tous les candidats

#### Partie A : restitution organisée de connaissances

#### Partie B

1. D'après le résultat de la partie A les fonctions solutions sont de la forme :

$$x \mapsto Ce^{-3x} + 2.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-3x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-3x} + 2 = 2$  : toutes ces fonctions ont une représentation graphique qui admet la droite horizontale d'équation  $y = 2$ , comme asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini. Affirmation vraie.

2. On sait que  $f(x) = Ce^x$ .

$$f(\alpha + \beta) = Ce^{\alpha + \beta} = Ce^\alpha \times e^\beta;$$

$$f(\alpha) \times f(\beta) = Ce^\alpha \times Ce^\beta = C^2 e^\alpha \times e^\beta. \text{ Affirmation fausse.}$$

respectives

Une fonction solution est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = Ce^{-2x}$ .

$$f(0) = \frac{3}{2} \iff Ce^{-2 \times 0} = \frac{3}{2} \iff C = \frac{3}{2}.$$

Donc sur  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3}{2}e^{-2x}$ . Une primitive de cette fonction est  $F(x) = \frac{1}{-2} \times \frac{3}{2}e^{-2x} = -\frac{3}{4}e^{-2x}$

La fonction est positive sur  $[0; \ln 3]$ , donc l'aire du domaine est égal en unité d'aire à :

$$\int_0^{\ln 3} f(x) dx = [F(x)]_0^{\ln 3} = F(\ln 3) - F(0) = -\frac{3}{4}e^{-2 \ln 3} + \frac{3}{4}e^{-2 \times 0} = \frac{3}{4} \left(1 - e^{-2 \ln 3}\right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{2 \ln 3}}\right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{\ln 3^2}}\right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{\ln 9}}\right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}. \text{ Affirmation vraie.}$$

#### EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

#### Partie A

$$1. z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff (z-1)^2 + 1 = 0 \iff (z-1)^2 - i^2 = 0 \iff$$

$$(z-1+i)(z-1-i) = 0 \iff$$

$$\begin{cases} z-1+i=0 \text{ ou} \\ z-1-i=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=1-i \text{ ou} \\ z=1+i \end{cases}.$$

2. Soit  $M_1$  d'affixe  $z_1 = 1 - i$ . On a  $AM_1 = |z_1 - z_A| = |1 - i - 1| = |-i| = 1$ .

De même  $AM_2 = |z_2 - z_A| = |1 + i - 1| = |i| = 1$ . Ces deux résultats signifient que  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent au cercle de centre A et de rayon 1 soit au cercle  $\mathcal{C}$ .

#### Partie B

1. Voir à la fin de l'exercice.

$$2. z' = \frac{2z-1}{2z-2} \Rightarrow z' - 1 = \frac{2z-1}{2z-2} - 1 \iff z' - 1 = \frac{2z-1-2z+2}{2z-2} \iff z' - 1 = \frac{1}{2(z-1)} \iff (z' - 1)(z - 1) = \frac{1}{2}.$$

3. Le résultat précédent entraîne :

- en termes de modules :  $AM \times AM' = \frac{1}{2}$ ;

- le produit des deux complexes étant non nul aucun des deux facteurs ne peut l'être, et en particulier  $z' - 1 \neq 0 \iff z' \neq 1$ , soit  $M' \neq A$ ;

- en termes d'argument :  $\arg[(z' - 1)(z - 1)] = 0 + 2k\pi$ . Or

$$\arg[(z' - 1)(z - 1)] = \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}\right), \text{ donc } \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}\right) = 0 + 2k\pi, \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4. On a  $z_p = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z_p - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow |z_p - 1| = \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \iff |z_p - 1| = 1$ .

Cette dernière égalité montre que P appartient au cercle de centre A et de rayon 1, donc au cercle  $\mathcal{C}$ .

Il ne reste plus qu'à construire sur ce cercle le point tel que  $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AP}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

5. On a  $AP \times AP' = \frac{1}{2}$ ; or  $AP = 1$ , donc  $AP' = \frac{1}{2}$ . Le point  $P'$  appartient au cercle  $\mathcal{C}_1$  de centre A et de rayon  $\frac{1}{2}$ . D'autre part on a  $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AP'}\right) = -\frac{\pi}{4}$ .

On peut donc construire  $P_1$  symétrique sur le cercle  $\mathcal{C}$  du point P autour de l'axe horizontal contenant A. Le point  $P'$  est le point commun à  $[AP_1]$  et au cercle  $\mathcal{C}_1$ . Voir plus bas.

6. a. On a donc  $z = \frac{3}{4} + \alpha i$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . D'où :

$$z' = \frac{2\left(\frac{3}{4} + \alpha i\right) - 1}{2\left(\frac{3}{4} + \alpha i\right) - 2} = \frac{\frac{3}{2} + 2\alpha i - 1}{\frac{3}{2} + 2\alpha i - 2} = \frac{\frac{1}{2} + 2\alpha i}{-\frac{1}{2} + 2\alpha i} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 2\alpha i\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\alpha i\right)}{\left(-\frac{1}{2} + 2\alpha i\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\alpha i\right)} = \frac{-\frac{1}{4} - \alpha i - \alpha i + 4\alpha^2}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2} =$$

$$z' = \frac{-\frac{1}{4} - 2\alpha i + 4\alpha^2}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2}.$$

$$\text{D'où } |z'|^2 = \frac{\left(-\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} + \frac{4\alpha^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{16} + 16\alpha^4 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{16} + 16\alpha^4 + 2\alpha^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2}{\left(\frac{1}{4} + 4\alpha^2\right)^2} = 1. \text{ D'où } |z'| = 1 : \text{ le point } M' \text{ appartient au cercle } \mathcal{C}' \text{ de centre O de rayon 1.}$$

- b. Un point  $M'$  de  $\mathcal{C}'$  a une affixe qui peut s'écrire  $z' = e^{ia}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . Son ou ses antécédents par  $f$  vérifient :

$$e^{ia} = \frac{2z-1}{2z-2} \iff 2ze^{ia} - 2e^{ia} = 2z-1 \iff 2z(e^{ia}-1) = 2e^{ia}-1 \iff z = \frac{2e^{ia}-1}{e^{ia}-1} \text{ si } e^{ia}-1 \neq 0.$$

Or  $e^{ia}-1 = 0 \iff e^{ia} = 1 \iff a = 0 \iff z = 1$ . C'est le point A et on sait que ce point n'a pas d'image par  $f$ . La réponse est : non.

#### EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

#### Partie A

1.  $DB = DE = \sqrt{2}$  et de façon évidente  $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE}\right) = \frac{\pi}{2}$ , donc B a pour image E par  $r$ .

D'autre part l'image de C par  $r$  est le point F

Comme B et C ont pour images respectives par  $r$ , E et F, l'image du segment [BC] sert le segment [EF] et l'image du milieu I de [BC] est le milieu J de [EF].

2. Comme A est différent de I et B différent de J, on sait qu'il existe une seule similitude transformant A en C et I en J : c'est donc la rotation  $r$ .

3. a.  $z_A = 0$ ;  $z_C = 1 + i$ ,  $z_I = 1 + \frac{1}{2}i$  et  $z_J = \frac{1}{2} + 2i$ .

- b.  $s$  étant une similitude directe, on sait que son écriture complexe est de la forme :

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}.$$

En utilisant les deux points donnés et leurs images, on obtient le système :

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{2}i = a \times 0 + b \\ \frac{1}{2} + 2i = a \times (1 + i) + b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}i = b \\ \frac{1}{2} + 2i = a \times (1 + i) + 1 + \frac{1}{2}i \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{2}i = b \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = a \times (1 + i) \end{cases}$$

$$\text{D'où } a = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{1 + i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{2(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 + 3 + i + 3i}{2(1 + 1)} = \frac{1}{2} + i.$$

$$\text{L'écriture complexe de } s \text{ est } z' = \left(\frac{1}{2} + i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i.$$

c. Recherche du point invariant (le centre de la similitude) :

$$z = \left(\frac{1}{2} + i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i \iff z\left(\frac{1}{2} - i\right) = 1 + \frac{1}{2}i \iff z = \frac{1 + \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} - i} = \frac{(1 + \frac{1}{2}i)(\frac{1}{2} + i)}{(\frac{1}{2} - i)(\frac{1}{2} + i)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i + i\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{5}{4}i}{\frac{5}{4}} = i.$$

Le point invariant a pour affixe  $i$  : c'est le point D.

## Partie B

1. On sait que l'écriture complexe de la similitude  $s_1$  est de la forme :

$z' = az + b$ . En utilisant le fait que O a pour image M et que N a pour image P, on obtient le système :

$$\begin{cases} m &= a \times 0 + b \\ p &= an + b \end{cases} \iff \begin{cases} m &= b \\ p &= an + m \end{cases} \iff \begin{cases} m &= b \\ p - m &= an \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{n}{p - m} &= \frac{b}{a} \\ \frac{p - m}{n} &= a \end{cases}$$

Donc  $s_1$  a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{p - m}{n}z + m.$$

On admet que l'écriture complexe de  $s_2$  est  $z' = \frac{p - n}{m}z + n$ .

2. a.  $OMPN$  est un parallélogramme  $\iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP} \iff m = p - n \iff p - m = n$ .

L'écriture complexe de  $s_1$  devient  $z' = \frac{n}{n}z + m \iff z' = z + m$  : cette écriture est celle d'une translation de vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

De même l'écriture complexe de  $s_2$  s'écrit puisque  $p - n = m$ ,

$z' = z + n$  : c'est la translation de vecteur  $\overrightarrow{ON}$ .

b. On suppose donc que  $p - m \neq n$  (donc  $s_1$  et  $s_2$  ne sont pas des translations).

Le point fixe de  $s_1$  a une affixe  $z$  qui vérifie :

$$z = \frac{p - m}{n}z + m \iff nz = (p - m)z + n \iff z(m + n - p) = n \iff z = \frac{n}{m + n - p}. s_1 \text{ a donc un centre.}$$

De même le point fixe de  $s_2$  a une affixe  $z$  qui vérifie :

$$z = \frac{p - n}{m}z + n \iff mz = (p - n)z + n \iff z(m + n - p) = n \iff z = \frac{n}{m + n - p}. s_2 \text{ a donc un centre}$$

et c'est le même que celui de  $s_1$ .

**Annexe 1**  
**(Exercice 1)**  
**Commun à tous les candidats**

*À rendre avec la copie*

