Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie
Série obligatoire mars 2012

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

1. $P\left(\text{i}\sqrt{2}\right) = \left(\text{i}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+\text{i}\sqrt{2}\right)\left(\text{i}\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\text{i}\sqrt{2}\right)\left(\text{i}\sqrt{2}\right) - 2\text{i}\sqrt{2} =$
$-2\text{i}\sqrt{2}+4+2\text{i}\sqrt{2}+2\text{i}\sqrt{2}-4-2\text{i}\sqrt{2} = 0 \iff \text{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a.** Développons : $\left(z-\text{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) = z^3+az^2+bz-z^2\text{i}\sqrt{2}-az\text{i}\sqrt{2}-b\text{i}\sqrt{2} = z^3+\left(a-\text{i}\sqrt{2}\right)z^2+\left(b-a\text{i}\sqrt{2}\right)z-b\text{i}\sqrt{2}$.

Par identification avec l'énoncé, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a-\text{i}\sqrt{2} &=& -2-\text{i}\sqrt{2}\\ b-a\text{i}\sqrt{2} &=& 2+2\text{i}\sqrt{2}\\ -b\text{i}\sqrt{2} &=& -2\text{i}\sqrt{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& -2\\ b+2\text{i}\sqrt{2} &=& 2+2\text{i}\sqrt{2}\\ -b &=& -2\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& -2\\ b &=& 2\\ b &=& 2\end{array}\right.$$

On a donc $P(z) = \left(z-\text{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)$

b. En utilisant la factorisation précédente :

$$P(z)=0 \iff \left(z-\text{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-\text{i}\sqrt{2} &=& 0\\ z^2-2z+2 &=& 0\end{array}\right.$$

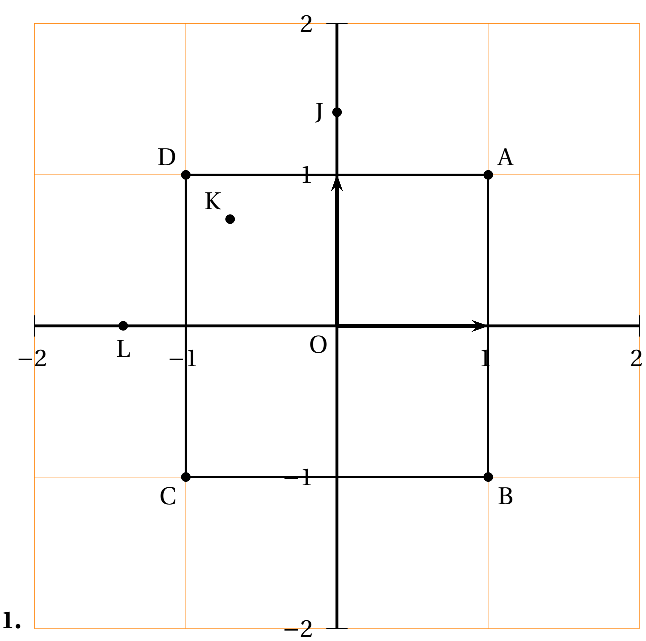
On retrouve la racine $\text{i}\sqrt{2}$; résolution de l'équation du second degré :

$z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2-1+2=0 \iff (z-1)^2+1=0 \iff$

$$(z-1)^2=-1 \iff (z-1)^2=\text{i}^2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-1 &=& \text{i}\\ z-1 &=& -\text{i}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 1+\text{i}\\ z &=& 1-\text{i}\end{array}\right.$$

Les solutions sont donc : $\text{i}\sqrt{2}$, $1+\text{i}$, $1-\text{i}$.

Partie B :

1. 

2. On a $z_{\text{K}} = \text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \text{i}\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

K est le milieu du segment [JL] ce qui se traduit en coordonnées par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{\text{K}} & = & \frac{1}{2}\left(x_{\text{J}} + x_{\text{L}}\right) \\ y_{\text{K}} & = & \frac{1}{2}\left(y_{\text{J}} + y_{\text{L}}\right)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -\frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{1}{2}\left(0 + x_{\text{L}}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + y_{\text{L}}\right)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{\text{L}} & = & -\sqrt{2} \\ y_{\text{L}} & = & 0\end{array}\right.$$

Conclusion : $z_{\text{L}} = -\sqrt{2}$.

3. On a $|z_{\text{A}}|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$|z_{\text{B}}|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$

$\left|z_{\text{J}}\right|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$|z_{\text{L}}|^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

On a donc OA = OB = OJ = OL = $\sqrt{2}$: les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et le rayon $\sqrt{2}$.

4. **a.** Un argument de z_{J} est $\dfrac{\pi}{2}$ et un argument de z_{D} est $\dfrac{3\pi}{4}$, donc l'angle de la rotation est $\dfrac{\pi}{4}$.

b. Par définition de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, on a :

$$z_{\text{C}} - z_{\text{O}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z_{\text{L}} - z_{\text{O}}\right) \iff z_{\text{C}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} z_{\text{L}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right) = -1 - \text{i}.$$

5. On a successivement :

O est milieu de [BD] et [AC], donc ABCD est un parallélogramme ;

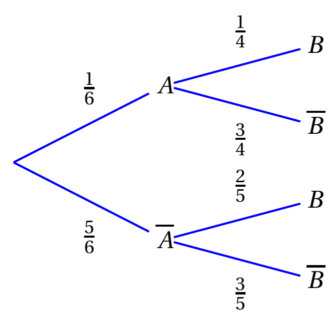
AC = BD = $2\sqrt{2}$, (diagonales de carré de côté 2) donc ABCD est un rectangle ;

(AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc ABCD est un losange, donc finalement : ABCD est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.**



b. D'après la loi des probabilités totales : $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{8}{24} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8} = 0,375$.

c. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{1}{24} \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{1}{9}$.

2. **a.** Les parties étant indépendantes la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

La probabilité de gagner exactement trois parties est égale à :

$p(\text{X} = 3) = \dbinom{10}{3}\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(1 - \dfrac{3}{8}\right)^{10-3} = \dbinom{10}{3}\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^7 \approx 0,2357 \approx 0,236$ au millième près.

b. On a $p(\text{X} \geqslant 1) = 1 - p(\text{X} = 0) = 1 - \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^0 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} \approx 0,9909 \approx 0,991$ au millième près.

c. À partir du tableau donné on calcule les probabilités $P(\mathrm{X}=k-1)$ par différence entre deux valeurs consécutives. On constate que $P(\mathrm{X}=7)$ est la première valeur inférieure à 0,1. Donc $N=7$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathrm{X}<k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9
$P(\mathrm{X}=k-1)$	0,009 1	0,054 6	0,147 3	0,235 7	0,247 6	0,178 2	0,089 1	0,030 6	0,006 8	0,000 9

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

VRAI ou FAUX?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. **Énoncé 1 :**
   OUI : exemple $a_n=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2^n}$.
2. **Énoncé 2 :**
   FAUX : on a $z_1=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ qui a pour argument $\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{3}$ et $z_{20}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\times 20\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{40\mathrm{i}\pi}{3}}$. Or
   $\dfrac{40\pi}{3}=\dfrac{36\pi+4\pi}{3}=12\pi+\dfrac{4\pi}{3}$, donc z_{20} a pour argument $\dfrac{4\pi}{3}\neq\dfrac{2\pi}{3}$. Donc les points O, M_1 et M_{20} ne sont pas alignés.
3. **Énoncé 3 :**
   Proposition 3 :
   FAUX : si la courbe 3 est la représentation graphique de f, la courbe 1 est celle de F puisque c'est la seule qui contient l'origine ($F(0)=0$).
   Or on voit sur la courbe 1 que $F'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, mais $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0$. Donc la courbe 1 n'est pas la représentation graphique de la primitive F.
4. **Énoncé 4 :**
   Proposition 4 : Calculons la distance de A au plan P :
   $d(\mathrm{A}\,;\,\mathrm{P})=\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\approx 1,225.$
   La distance est inférieure au rayon du cercle : la réponse est VRAI.
5. **Énoncé 5 :**
   Proposition 5 :
   On sait que la fonction définie par $x\longmapsto 2$ est une solution particulière de (E).
   D'autre part les solutions de l'équation (E') : $y'+2y=0$ sont les fonctions de la forme $K\mathrm{e}^{-2x}$.
   Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par $y=2+K\mathrm{e}^{-2x}$.
   Or $y(0)=0 \iff 2+K\mathrm{e}^0=0 \iff 2+K=0 \iff K=-2$.
   La fonction solution est donc définie par : $y=2-2\mathrm{e}^{-2x}$.
   On voit avec les limites en $+\infty$ et $-\infty$ que la représentation graphique est la courbe C_3. Donc FAUX

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A :

1. Posons :
$\left\{\begin{array}{lll} u'(x) & = & \mathrm{e}^x \\ v(x) & = & x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} u(x) & = & \mathrm{e}^x \\ v'(x) & = & 1 \end{array}\right.$
Toutes les fonctions étant continues car dérivables sur $[0;1]$, on peut procéder à une intégration par parties :
$\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - 0 - (\mathrm{e} - 1) = 1.$

2. **a.** $\mathscr{A}(\mathrm{OAA'}) = \dfrac{1}{2} a \times a\mathrm{e}^a = \dfrac{1}{2} a^2\mathrm{e}^a.$
$\mathscr{A}(\mathrm{ABB'A'}) = \dfrac{1}{2}(a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}) \times (1 - a) = \dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right).$

b. Les segments [OA] et [AB] étant au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ l'aire de la partie hachurée est égale à la somme des aires du triangle et du trapèze précédents diminuée de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, soit :
$\dfrac{1}{2}a^2\mathrm{e}^a + \dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right) - \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$
$\dfrac{1}{2}\left(a^2\mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right) - 1 = \dfrac{1}{2}(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2).$

PARTIE B :

1. Toutes les fonctions sont dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$, donc :
$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + x\mathrm{e}^x$.
Puis $g''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2 + x)$.
2. On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, et sur $[0\,;\,+\infty[$, $2 + x \geqslant 2 > 0$: donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $g''(x) > 0$: on conclut que la fonction g' est croissante (strictement) sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. On a $g'(0) = 1 - \mathrm{e} < 0$ et $g'(1) = \mathrm{e} > 0$.
Donc la fonction g' monotone croissante et croissante sur $[0;1]$ de $g'(0) < 0$ à $g'(1) > 0$ s'annule une seule fois sur cet intervalle.
Il existe donc un réel $\alpha \in [0\,;\,1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne : $0,5 < \alpha < 0,6$.
4. Sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$, $g'(x) < 0$: la fonction est donc décroissante sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty]$, $g'(x) > 0$: la fonction est donc croissante sur cet intervalle.
5. D'après tous les résultats précédents, l'aire de la surface hachurée est égale à : $\dfrac{1}{2}g(a)$. Or on a vu que la fonction g a sur $[0\,;\,+\infty[$ et également sur $[0;1]$ un minimum en $x = \alpha$.
L'aire minimum est donc égale à : $\dfrac{1}{2}g(\alpha)$
Non demandé : cette aire vaut approximativement 0,088 2 unité d'aire.