Durée : 4 heures

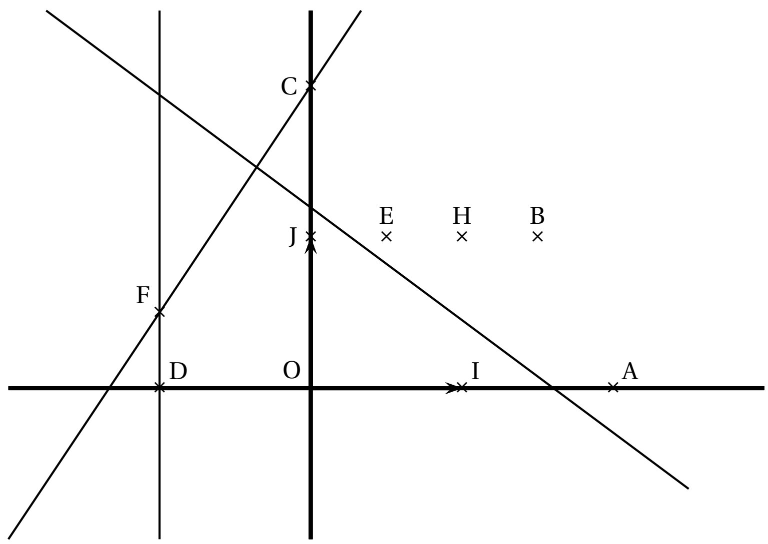
Corrigé du baccalauréat S Nouvelle–Calédonie 16 novembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie I

1.



2. Par définition $z_{\text{H}} = \dfrac{z_{\text{E}} + z_{\text{B}}}{2} \iff 1 + \text{i} = \dfrac{z_{\text{E}} + \frac{3}{2} + \text{i}}{2} \iff 2 + 2\text{i} = z_{\text{E}} + \dfrac{3}{2} + \text{i} \iff z_{\text{E}} = \dfrac{1}{2} + \text{i}$.

Équation de la perpendiculaire à (AE) contenant C : le vecteur $\overrightarrow{\text{AE}}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}\ ;\ 1\right)$; l'équation est donc de la forme $-\dfrac{3}{2}x + y + c = 0$ et cette droite contient C, donc $\dfrac{3}{2} \times 0 + 2 + c = 0 \iff c = -2$. Donc une équation est

$$-\frac{3}{2}x + y - 2 = 0 \iff 3x - 2y + 4 = 0.$$

La parallèle à (OC) contenant D est simplement : $x = -1$.

Le point F étant commun à ces droites, ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x - 2y + 4 &=& 0 \\ x &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -3 - 2y + 4 &=& 0 \\ x &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \dfrac{1}{2} \\ x &=& -1 \end{array}\right.$$

On a bien $z_{\text{F}} = -1 + \text{i}\dfrac{1}{2}$.

3. On a de suite $\text{OA} = \text{OC} = 2$; $\text{OB}^2 = \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{13}{4}$; $\text{CF} = |z_{\text{F}} - z_{\text{C}}| = \left|-1 - \dfrac{3}{2}\text{i}\right|$, donc $\text{CF}^2 = 1 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{13}{4}$; on a donc $\text{OB} = \text{CF}$;

Enfin $\text{AB}^2 = |z_{\text{B}} - z_{\text{A}}|^2 = \left|-\dfrac{1}{2} + \text{i}\right|^2 = \dfrac{5}{4}$ et $\text{OF}^2 = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$. Donc $\text{AB} = \text{OF}$ et les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

1. O′ a pour affixe 2i ; donc O′ = C
   A′ a pour affixe : $-2\text{i}+2\text{i}=0$; donc A′ = O ;
   B′ a pour affixe : $-\text{i}\left(\dfrac{3}{2}-\text{i}\right)+2\text{i}=-1+\dfrac{1}{2}\text{i}$; donc B′ = F
2. **a.** L'écriture de la transformation est de la forme $z'=a\overline{z}+b$: c'est donc une similitude indirecte.
   D'après la question 3 de la partie I, les triangles OAB et OCF sont isométriques et on vient de voir que l'image du triplet (O, A, B) est le triplet (C, O, F), donc f est une isométrie.

   b. Les points invariants par f ont une affixe qui vérifient : $z=-\text{i}\overline{z}+2\text{i} \iff x+\text{i}y=-\text{i}(x-\text{i}y)+2\text{i} \iff x+\text{i}y=-\text{i}x-y+2\text{i} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y\\ y &=& -x+2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y\\ y &=& y+2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y\\ 0y &=& 2\end{array}\right.$ système qui n'a pas de solution.
   Conclusion : il n'y a pas de point invariant par f.

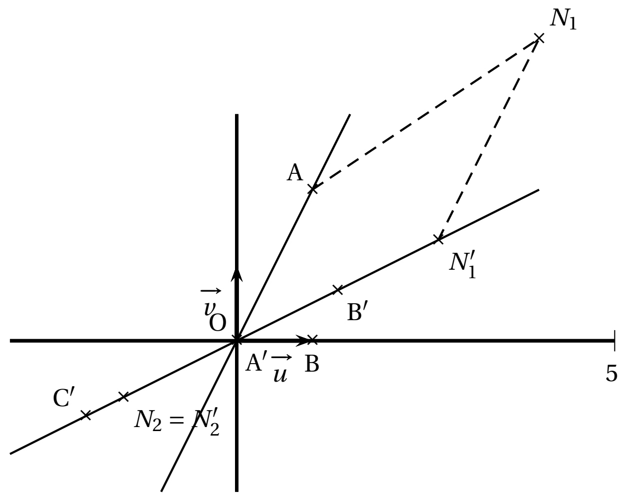
   c. D'après le résultat précédent f ne peut pas être une symétrie axiale (car les points de l'axe seraient invariants).
3. On a $z'=z+z_{\text{IJ}} \iff z'=z+(-1+\text{i}) \iff z'=z-1+\text{i}$ qui est donc l'écriture complexe de t.
   La réciproque de t est la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{JI}}$. Son écriture complexe est donc $z'=z+1-\text{i}$.
4. **a.** On a $s=f\circ t^{-1}$. Donc $s(z)=f\circ t^{-1}(z)=f\left[t^{-1}(z)\right]=f(z+1-\text{i})=$
   $-\text{i}\left(\overline{z+1-\text{i}}\right)+2\text{i}=-\text{i}\left(\overline{z}+1+\text{i}\right)+2\text{i}=-\text{i}\overline{z}-\text{i}+1+2\text{i}=-\text{i}\overline{z}+1+\text{i}$.

   b. L'image de I par s a pour affixe : $-\text{i}\times 1+1+\text{i}=1$.
   L'image de J par s a pour affixe : $-\text{i}\times(-\text{i})+1+\text{i}=\text{i}$.
   Conclusion : I et J sont invariants par s.
   Comme s est de la forme : $z\mapsto a\overline{z}+b$, c'est une similitude indirecte ayant deux points invariants distincte de l'identité : c'est une symétrie axiale d'axe (IJ).

   c. Comme $s=f\circ t^{-1} \iff f=s\circ t$, on peut dire que f est la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et de la symétrie d'axe (IJ) : c'est une symétrie-glissée.

EXERCICE 1 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. $z_{\text{A}}=1+2\text{i}$; $z_{\text{A}'}=\dfrac{(3+4\text{i})(1+2\text{i})+5(1-2\text{i})}{6}=\dfrac{3-8+5+6\text{i}+4\text{i}-10\text{i}}{6}=0$;
   $z_{\text{B}}=1$; $z_{\text{B}'}=\dfrac{3+4\text{i}+5}{6}=\dfrac{4+2\text{i}}{3}$;
   $z_{\text{C}}=3\text{i}$; $z_{\text{C}'}=\dfrac{3\text{i}(3+4\text{i})+5\times(-3\text{i})}{6}=\dfrac{9\text{i}-12-15\text{i}}{6}=-2-\text{i}$.



2. On a $z' = x' + \mathrm{i}y' = \dfrac{(3+4\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)+5(x-\mathrm{i}y)}{6} = \dfrac{3x-4y+5x}{6} + \mathrm{i}\dfrac{4x+3y-5y}{6}$.
En identifiant parties réelles et parties imaginaires,

$$x' = \frac{4x-2y}{3}\ ,\ y' = \frac{2x-y}{3}$$

3. Les points invariants par f vérifient $z' = z \iff \begin{cases} x &= \dfrac{4x-2y}{3} \\ y &= \dfrac{2x-y}{3} \end{cases} \iff$

$\begin{cases} 3x &= 4x-2y \\ 3y &= 2x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2y \\ 4y &= 2x \end{cases} \iff y = \dfrac{x}{2}$.

Les points invariants par f sont donc les points de la droite (D) dont l'une des équations est $y = \dfrac{x}{2}$.

On remarque qu'il en est bien ainsi pour les points A′, B′ et C′.

4. En reprenant les équations trouvées à la question 2 on constate que $x' = 2y' \iff y' = \dfrac{x'}{2} \iff M'(x'\ ;\ y') \in (\mathrm{D})$.

5. **a.** Calculons $\dfrac{z'-z}{z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{z(3+4\mathrm{i})+5\overline{z}-6z}{6(1+2\mathrm{i})} = \dfrac{z(-3+4\mathrm{i})+5\overline{z}}{6(1+2\mathrm{i})} =$
$\dfrac{(-3+4\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})z+5(1-2i)\overline{z}}{6\times 5} = \dfrac{(-3+8+6\mathrm{i}+4\mathrm{i})z+(5-10\mathrm{i})\overline{z}}{6\times 5} =$
$\dfrac{(5+10\mathrm{i})z+(5-10\mathrm{i})\overline{z}}{6\times 5} = \dfrac{(1+2\mathrm{i})z+(1-2\mathrm{i})\overline{z}}{6} = \dfrac{z+\overline{z}}{6} + \dfrac{2\mathrm{i}z-2\mathrm{i}\overline{z}}{6} =$
$\dfrac{z+\overline{z}}{6} + \mathrm{i}\left(\dfrac{z-\overline{z}}{3}\right)$.

Or $z+\overline{z} = 2x \in \mathbb{R}$ et $z-\overline{z} = 2\mathrm{i}y \in i\mathbb{R}$ et $\mathrm{i}\left(\dfrac{z-\overline{z}}{3}\right) \in \mathbb{R}$. Les quotients par 6 et 3 sont encore des réels de même que leur somme.

Conclusion : $\dfrac{z'-z}{z_{\mathrm{A}}}$ est un nombre réel.

b. Si $M \neq M'$, d'après la question précédente, $\dfrac{z'-z}{z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{z'-z}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{O}}}$ est un réel, donc un complexe d'argument 0 modulo π. Or un argument de ce complexe est celui de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\ \overrightarrow{MM'}\right)$ qui est donc nul modulo π, ce qui signifie que la droite (MM') est parallèle à la droite (OA).

6. On en déduit la construction d'un point N' image d'un point N du plan et en utilisant le résultat de la question 4 :

— Si $N \notin (\mathrm{D})$, N' est le point commun à (D) et à la parallèle à (OA) contenant N (d'après les questions 4 et 5 b) ;

— Si $N \in (D)$, d'après la question 3, alors $N = N'$. (cf. figure ci-dessus)

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. a. $u_1 = 1,\ u_2 = u_1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2},\ u_3 = u_2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6},\ u_4 = \dfrac{11}{6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{12}$.

b. Par récurrence :

Initialisation : $u_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1$ qui est vrai ;

Hérédité : soit un naturel $n,\ n \geqslant 1$ et supposons que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Alors $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1} =$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.
La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 1 elle est vraie au rang suivant ; on a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. a. Si, pour un naturel k non nul $x \in [k\ ;\ k+1]$, alors $k \leqslant x \leqslant k+1 \iff \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$ (car tous ces termes sont supérieurs à zéro)
$\displaystyle\iff \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x \iff \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$ (car les intégrales de fonctions positives sont rangées dans le même ordre que ces fonctions.)

b. En écrivant les encadrements précédents pour $k = 1, \ldots, n$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{1}{2} & \leqslant & \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & \leqslant & \dfrac{1}{1}\\
\dfrac{1}{3} & \leqslant & \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & \leqslant & \dfrac{1}{2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\dfrac{1}{n} & \leqslant & \displaystyle\int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & \leqslant & \dfrac{1}{n-1}
\end{array}$$

Soit en sommant membre à membre et pour les intégrales en utilisant la relation de Chasles :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

soit :

$$u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n}.$$

De l'inégalité de gauche, on en déduit que $u_n - \ln n \leqslant 1$ et de l'inégalité de droite $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n - \ln n$, soit $\dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1$.
On a donc *a fortiori* $0 < v_n \leqslant 1$

c. Variation de v_n : on calcule $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ pour tout naturel n non nul. Or d'après l'encadrement trouvé à la question 2. a., on a

$\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \iff \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ ce qui montre que $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, c'est-à-dire que la suite (v_n) est décroissante.

3. La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par zéro : elle est donc convergente vers un nombre γ supérieur ou égal à zéro.
   Puisque $u_n = v_n + \ln n$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \gamma$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, on obtient par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) est donc divergente.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

Question de cours : A et B sont deux évènements indépendants.

partie I
On a donc $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$.
D'après la formule des probabilités totales $p(A) = p(A\cap B) + p\left(A\cap \overline{B}\right) \iff p\left(A\cap\overline{B}\right) = p(A) - p(A\cap B) \iff p\left(A\cap\overline{B}\right) = p(A) - p(A)\times p(B) = p(A)[1-p(B)] = p(A)\times p\left(\overline{B}\right)$, ce qui montre que les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

1. Il y a $\binom{8}{3}$ tirages différents. Il y a $\binom{5}{3}\times\binom{3}{1}$ tirages de deux boules noirs et une boule rouge.
   La probabilité est donc égale à $\dfrac{\binom{5}{3}\times\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{\frac{5!}{3!\times 2!}\times\frac{3!}{2!\times 1!}}{\frac{8!}{3!\times 5!}} = \dfrac{10\times 3}{8\times 7} = \dfrac{15}{28}$. Réponse D.
2. Parmi les grippés s'il y en a x de vaccinés, il y en a $9x$ non-vaccinés et au total $x + 9x = \dfrac{1}{4} \iff x = \dfrac{1}{40}$. On a donc, avec des notations évidentes : $p(\mathrm{V}\cap\mathrm{G}) = \dfrac{1}{40}$.
   Or $p_{\mathrm{V}}(G) = \dfrac{p(\mathrm{V}\cap\mathrm{G})}{p(V)} = \dfrac{140}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{40}\times 3 = \dfrac{3}{40}$. Réponse B.
3. L'espérance de gain est égale à 2 ; les carrés des écarts à l'espérance sont 64, 1, 1, 4, 4, 4 respectivement pour les issues : 1, 2, 4, 3, 5, 6.
   La variance est donc égale à $\dfrac{78}{6} = 13$. Réponse B.
4. La probabilité est $P_{T>2}(T<5) = \dfrac{P[(T>2)\cap(T<5)]}{p(T>2)} = \dfrac{\int_2^5 \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x}{1-\int_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{6}} - \mathrm{e}^{-\frac{5}{6}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{6}}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{6}} \approx 0{,}393\,46$ arrondi à $0{,}393\,5$. Réponse B.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. On a dans le triangle rectangle ABD, $\mathrm{AD}\cos\theta = \mathrm{AB} = 4 \iff \mathrm{AD} = \dfrac{4}{\cos\theta}$ (puisque $\theta < \dfrac{\pi}{2}$.
   De même $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{4} \iff \mathrm{BD} = 4\tan\theta$.

$t_1 = \dfrac{\dfrac{0,004}{\cos\theta}}{30}$.

$t_2 = \dfrac{0,007 + 0,004\tan\theta}{60}$.

2. Le lapin aura pu traverser sans encombre si $t_1 < t_2 \iff$

$\dfrac{\dfrac{0,004}{\cos\theta}}{30} < \dfrac{0,007+0,004\tan\theta}{60} \iff \dfrac{0,008}{\cos\theta} < 0,007 + 0,004\tan\theta \iff$

$8 < 7\cos\theta + 4\sin\theta \iff \dfrac{7}{2}\cos\theta + 2\sin\theta - 4 > 0 \iff$

$\dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta} > 0 \iff f(\theta) > 0$.

3. Étudions les variations de la fonction : $f'(\theta) = \dfrac{2}{\cos^2\theta} - \dfrac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$ qui est du signe de $2 - 4\sin\theta$.

Or $2 - 4\sin\theta = 0 \iff \sin\theta = \dfrac{1}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{6}$.

La fonction f est donc croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Or $f(0) = \dfrac{7}{2} - 4 = -\dfrac{1}{2} < 0$;

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{7}{2} + 2\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 2\times\dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{6\sqrt{3}}{3} \approx 0,033\,59 > 0$.

En écrivant $f(\theta)$ sous la forme $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta}$, on voit que $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$.

Comme le suggère le graphe, la fonction est positive si $0,4 \leqslant \theta \leqslant 0,64$ (environ) soit si l'angle mesure entre 23 et 37 degrés environ.