Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2007 (spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. *Question de cours*
   Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\,(a,\ b,\ c)$ et un point $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$.
   $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

2. **a.** Considérons par exemple les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires. Les trois points distincts A, B et C définissent un plan $\mathcal{P}$.

   b. $\text{A}\in\mathcal{P} \iff 2\times 1-2+(-3)+3=0$: Vrai.
   $\text{B}\in\mathcal{P} \iff 2\times(-3)-1+4+3=0$: Vrai.
   $\text{C}\in\mathcal{P} \iff 2\times 2-6+(-1)+3=0$: Vrai.
   L'équation du plan (ABC) est bien :

   $$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\text{ABC}) \iff 2x-y+z+3=0.$$

   c. I$(-5\ ;\ 9\ ;\ 4)$. On a vu à la question de cours que les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. En traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{I}M}=\alpha\,\vec{u}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$, on obtient le système :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x-(-5) &=& 2\alpha\\ y-9 &=& -\alpha\\ z-4 &=& \alpha\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} x &=& -5+2\alpha\\ y &=& 9-\alpha\\ z &=& 4+\alpha\end{array}\right. \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

   d. Les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC) vérifient le système précédent et l'équation du plan (ABC). On a donc :

   $$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& -5+2\alpha\\ y &=& 9-\alpha\\ z &=& 4+\alpha\\ 2x-y+z+3 &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow 2(-5+2\alpha)-(9-\alpha)+4+\alpha+3=0$$

   $\iff 6\alpha-12=0 \iff \alpha=2$.
   Les coordonnées du point J sont donc $(-1\ ;\ 7\ ;\ 6)$.

   e. La distance du point I au plan (ABC) est IJ puisque $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC). Or $\text{IJ}^2=(-1+5)^2+7-9)^2+(6-4)^2=16+4+4=24$. Donc IJ$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.
   On peut vérifier que $d(\text{I},\ \mathcal{P})=\dfrac{|2\times(-5)-9+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{6}}=\dfrac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

A.

Question 1 La probabilité de tirer trois boules noires est : $\left(\dfrac{4}{8}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

Question 2 : On a $p_{XXX}(RRR) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{8}\right)^3}{\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 + \left(\dfrac{4}{8}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{8}\right)^3} = \dfrac{1}{27+64+1} = \dfrac{1}{92}$.

B.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ si
$\displaystyle\int_0^1 (x+m)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{(x+m)^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{(1+m)^2}{2} - \dfrac{m^2}{2} = 1 \iff 2m+1 = 2 \iff 2m = 1 \iff$
$m = \dfrac{1}{2}$.

C.

Question 4 : On a $\displaystyle\int_5^{+\infty} 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}2x}\right]_5^{+\infty} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Si $a = 0$, $an+b = b$, donc toutes les lettres seront codées par la même lettre correspondant au reste de la division de b par 26.
2. Si $a = 13$.
   A correspond à 0, donc $an+b = b$. A est codée par la lettre qui correspond au reste de la division de b par 26.
   C correspond à 2, donc $an+b = 26\times 2+b \equiv b \pmod{26}$. Donc C est codé de la même façon que A.
3. *Dans toute la suite de l'exercice*, on prend $a = 5$ et $b = 2$.
   a. Si : $\begin{cases} 5n+2 & \equiv & r \pmod{26} \\ 5p+2 & \equiv & r \pmod{26}\end{cases}$, alors par différence
   $5(n-p) \equiv 0 \pmod{26} \Rightarrow n-p \equiv 0 \pmod{26}$ (car 5 est premier avec 26), donc finalement $n \equiv p \pmod{26}$. Or m et p sont inférieurs à 26. Conclusion $n = p$.
   b. On a la suite :
   A → 0 → 2 → C
   M → 12 → 10 → K
   I → 8 → 16 → Q.
   AMI est codé « CKQ ».
4. **a.** D'après le tableau E correspond à 4. Donc la lettre codée E correspond à un nombre n tel que $5n+2 \equiv 4 \quad 26 \iff 5n-2 \equiv 0 \pmod{26} \iff 5n-2 = 26y$, avec$y \in \mathbb{Z} \iff 5n-2 = 26y,\ y \in \mathbb{Z}$.
   b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
   i. Solution particulière de l'équation $5x-26y = 2$. On a $26 = 5\times 5+1 \iff 26\times 1 - 5\times 5 = 1 \iff 2\times 26 - 10\times 5 = 2 \iff 5\times(-10) - 26\times(-2) = 2$. On a donc une solution : le couple $(-10\,;\,-2)$.
   ii. On a le système :
   $\begin{cases} 5x-26y & = & 2 \\ 5\times(-10) - 26\times(-2) & = & 2\end{cases}$, d'où par différence :

$5(x+10)-26(y+2)=0 \iff 5(x+10)=26(y+2)$. 5 et 26 étant premiers entre eux, il en résulte d'après le théorème de Gauss qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x+10=26k$, d'où en substituant dans la dernière égalité : $y+2=5k$. On obtient donc : les couples solutions sont les couples $(x\,;\,y)$ tels que $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 26k-10 \\ y & = & 5k-2\end{array}\right.$

iii. $0 \leqslant x \leqslant 25 \iff 0 \leqslant 26k-10 \leqslant 25 \iff 10 \leqslant 26k \leqslant 35 \Rightarrow k=1$. Finalement $x=16$ et $y=3$. Le seul couple solution est $(16\,;\,3)$.

c. La lettre codée E correspond à $x=n=16$. D'après le tableau c'est Q.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

A. 1. $u_{n+1}-u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+2}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\cdots=\frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

A. 2. $n \in \mathbb{N}^*$ donc $-3n-2<0$ et $n(2n+2)(2n+1)>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

A. 3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}>0$: la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente par théorème.

B. 1. a. Soit n dans $\mathbb{N}^*$: $0<n \leqslant x \leqslant n+1$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Les fonctions sont continues sur $[n\,;\,n+1]$ et $n \leqslant n+1$ donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}x$ d'où $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$.

B. 1. b. $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln(x)]_n^{n+1}=\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

$\dfrac{1}{n}-f(n)=\dfrac{1}{n}-\left(\dfrac{1}{n}+\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right)=-\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

On a donc bien l'égalité : $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}-f(n)$.

B. 1. c. Par suite, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}-f(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n} \leqslant -f(n) \leqslant 0$ donc en multipliant pas -1, on obtient $0 \leqslant f(n) \leqslant \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ donc finalement

$0 \leqslant f(n) \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

B. 2. a. On écrit l'égalité $0 \leqslant f(k) \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour $k=n$; $k=n+1$; ... ; $k=2n$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & f(n) & \leqslant & \dfrac{1}{n(n+1)} \\ 0 & \leqslant & f(n+1) & \leqslant & \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & \leqslant & \ldots & \leqslant & \ldots \\ 0 & \leqslant & f(2n) & \leqslant & \dfrac{1}{2n(2n+1)} \end{array}$$

En sommant, on obtient $0 \leqslant f(n)+f(n+1)+\cdots+f(2n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}$ et donc $0 \leqslant f(n)+f(n+1)+\cdots+f(2n) \leqslant S_n$.

B. 2. b. Soit x dans $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. On a $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}=\dfrac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$.

Pour que $\dfrac{1}{x(x+1)}$ soit égale à $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$, il suffit de prendre a et b de sorte que $a+b=0$ et $a=1$, d'où $a=1$ et $b=-1$. Finalement, $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

B. 2. c. On écrit l'égalité $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ pour $x = n$; $x = n+1$; … ; $x = 2n$:

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{1}{n(n+1)} & = & \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\\
\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} & = & \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\\
\ldots & = & \ldots\\
\dfrac{1}{2n(2n+1)} & = & \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+1}
\end{array}$$

Par télescopage, on obtient $S_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$.

B. 2. d. Par suite, on a $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) \leqslant S_n$ avec $\lim 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$ d'après la règle opératoire. Le théorème des gendarmes s'applique et on peut conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$.

B. 2. e. On écrit l'égalité $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ pour $x = n$; $x = n+1$; … ; $x = 2n$:

$$\begin{array}{ccccc}
f(n) & = & \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) & = & \dfrac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1)\\
f(n+1) & = & \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) & = & \dfrac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2)\\
\ldots & = & \ldots & & \\
f(2n) & = & \dfrac{1}{2n} + \ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) & = & \dfrac{1}{2n} + \ln(2n) - \ln(2n+1)
\end{array}$$

Par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n + \ln(n) - \ln(2n+1) = u_n - (\ln(2n+1) - \ln(n))$

et finalement on a bien $f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

B. 2. f. On en déduit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) + \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$ et

$\lim\left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln(2)$ par continuité de ln en 2 donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.