

✎ Corrigé du baccalauréat S ✎ Nouvelle-Calédonie mars 2011

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = 0$, donc $\underbrace{u'(x)}_{y'} = a \times \underbrace{\left(-\frac{b}{a}\right)}_y + b \iff 0 = -b + b$.

Donc u est une solution de (E).2. f étant dérivable sur \mathbb{R} , $f - u$ l'est aussi et quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(f - u)(x) = f(x) - u(x), \text{ d'où}$$

$$(f - u)'(x) = f'(x) - u'(x) = f'(x).$$

Donc f est solution de (E) si et seulement si quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = af(x) + b \iff f'(x) - u'(x) = af(x) - au(x) + au(x) + b \iff$$

$$(f - u)'(x) = a(f(x) - u(x)) + a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b \iff (f - u)'(x) = a(f(x) - u(x)) - b + b \iff$$

$$(f - u)'(x) = a(f(x) - u(x)), \text{ c'est-à-dire que } f - u \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = ay.$$

3. D'après le résultat initial donné on a donc $f(x) - u(x) = Ke^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$, donc :

$$f(x) = Ke^{ax} + u(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Partie B

1. L'équation différentielle peut s'écrire : $v'(t) = 3 - \frac{1}{10}v(t)$.

On reconnaît une équation différentielle résolue dans la partie A avec

$$a = -\frac{1}{10} \text{ et } b = 3.$$

On a donc :

$$v(t) = Ke^{-\frac{1}{10}t} - \frac{3}{-\frac{1}{10}} = Ke^{-\frac{1}{10}t} + 30.$$

En utilisant la condition initiale $v(0) = 0 \iff K + 30 = 0 \iff K = -30$, on obtient finalement :

$$v(t) = 30 \left(1 - e^{-\frac{t}{10}} \right)$$

2. a. On sait que la fonction v est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$v'(t) = -30 \left(-\frac{1}{10} \right) e^{-\frac{t}{10}} = 3e^{-\frac{t}{10}} > 0,$$

car on sait que $e^{-\frac{t}{10}} > 0$, quel que soit le réel t .La fonction v est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$.b. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{10}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(t) = 30$.

3. Il faut donc résoudre l'inéquation dans $[0; +\infty[$, $v'(t) < 0,1$, soit, d'après l'équation différentielle

$$3 - \frac{1}{10}v(t) < 0,1 \iff 3 - \frac{1}{10} \times 30 \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) < 0,1 \iff 3e^{-\frac{t}{10}} < 0,1 \iff e^{-\frac{t}{10}} < \frac{0,1}{3} \iff \text{(par croissance de la fonction logarithme népérien)}$$

$$-\frac{t}{10} < \ln\left(\frac{1}{30}\right) \iff t > -10\ln\left(\frac{1}{30}\right).$$

Comme $-10\ln\left(\frac{1}{30}\right) \approx 34,01$, la vitesse est donc stabilisée à partir de la 35^e seconde.

4. On a donc $d_{35} = \int_0^{35} v(t) dt$.

On a $v(t) = 30 - 30e^{-\frac{t}{10}}$, dont une primitive sur $[0; +\infty[$ est :

$$V(t) = 30t + 300e^{-\frac{t}{10}}.$$

$$\text{D'où : } d_{35} = [V(t)]_0^{35} = 30 \times 35 + 300e^{-\frac{35}{10}} - \left(30 \times 0 + 300e^{-\frac{0}{10}}\right) = 1050 + 300e^{-\frac{35}{10}} - 300 = 750 + 300e^{-\frac{35}{10}} \approx 759,06 \approx 759,1 \text{ (m)}.$$

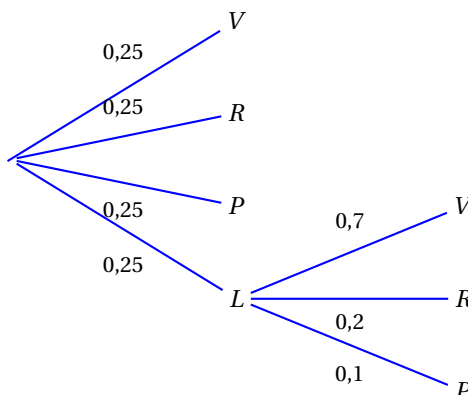
Rem. Plus rapide : on a vu que $v(t) = 30 - 10v'(t)$, donc une primitive de v est $30t - 10v(t)$, d'où un calcul de l'intégrale plus rapide.

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

1.



2. On a $p(V) = 0,25 + 0,25 \times 0,7 = 0,25 \times 1,7 = 0,425$.

3. On a $p_V(L) = \frac{p(V \cap L)}{p(V)} = \frac{0,25 \times 0,7}{0,425} = \frac{0,175}{0,425} = \frac{7}{17} \approx 0,412$.

4. On a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{2}{3}$.

La probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée 0 fois par un concurrent « non cycliste » est égale à

$$\binom{6}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6.$$

Donc la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste » est égale à :

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{3^6 - 1}{3^6} = \frac{665}{729} \approx 0,912.$$

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

$$1. f(x) = x \iff x - \ln(x^2 + 1) = x \iff \ln(x^2 + 1) = 0 \iff x^2 + 1 = 1 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

2. f somme de fonctions dérivables sur $[0; 1]$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - 2x \times \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}.$$

On a quel que soit x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ et sur $[0; 1]$, $(x-1)^2 \geq 0$, donc sur $[0; 1]$, $f'(x) \geq 0$: la fonction est donc croissante sur $[0; 1]$.

On a vu que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln 2 < 1$. La fonction est croissante de 0 à $1 - \ln 2 < 1$, donc toutes les images $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.

Partie B

1. *Initialisation* : $u_0 = 1 \leq 1$, donc $u_0 \in [0; 1]$. La relation est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \in [0; 1]$; d'après la partie A, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et on a vu que si $u_n \in [0; 1]$, alors

$$f(u_n) = u_{n+1} \in [0; 1].$$

On a donc pour tout naturel n , $u_n \in [0; 1]$.

2. On a $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$

$$\text{Or } u_n \geq 0 \Rightarrow u_n^2 \geq 0 \Rightarrow u_n^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln(u_n^2 + 1) \geq 0 \iff 0 \geq -\ln(u_n^2 + 1).$$

Conclusion : quel que soit le naturel n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$: la suite est décroissante.

3. La suite est décroissante et tous ses termes sont minorés par 0 : elle est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à 0.

Par continuité de la fonction dérivable f , on a à la limite :

$$\ell = f(\ell), \text{ équation dont on a vu que la seule solution est } 0.$$

$$\text{On a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On a $\vec{AB}(3; 2; -2)$, $\vec{AC}(0; 2; 1)$, d'où $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 + 4 - 2 = 2$.

$$\text{On a } AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = 9 + 4 + 4 = 17; \text{ donc } AB = \sqrt{17};$$

$$AC^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = 0 + 4 + 1 = 5, \text{ donc } AC = \sqrt{5}.$$

b. On sait que le produit scalaire peut aussi s'écrire :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}, \text{ soit :}$$

$$2 = \sqrt{17} \times \sqrt{5} \times \cos \widehat{BAC} \iff \cos \widehat{BAC} = \frac{2}{\sqrt{85}} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 77^\circ.$$

c. L'angle \widehat{BAC} n'étant ni nul, ni plat, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. On a : $(-2; 0; 1)$ vérifie $2x - y + 2z + 2 = 0 \iff -4 - 0 + 2 + 2 = 0$ égalité vraie;

$$(1; 2; -1) \text{ vérifie } 2x - y + 2z + 2 = 0 \iff 2 - 2 - 2 + 2 = 0 \text{ égalité vraie;}$$

$$(-2; 2; 2) \text{ vérifie } 2x - y + 2z + 2 = 0 \iff -4 - 2 + 4 + 2 = 0 \text{ égalité vraie.}$$

Les coordonnées des trois points non alignés A, B et C vérifient l'équation : cette équation est donc l'une des équations du plan (ABC).

3. \mathcal{P}_1 a pour vecteur normal $\vec{n}_1(1; 1; -3)$; \mathcal{P}_2 a pour vecteur normal $\vec{n}_2(1; -2; 6)$.

\vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont manifestement pas colinéaires, donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas parallèles et distincts : ils sont donc sécants suivant une droite \mathcal{D} dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x+y-3z+3 = 0 \\ x-2y+6z = 0 \end{cases} \text{ soit en posant } z = t :$$

$$\begin{cases} x+y+3 = 3z \\ x-2y = -6z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+3 = 3t \\ x-2y = -6t \\ z = t \end{cases} \iff \text{par différence des deux premières équations}$$

$$\begin{cases} 3y+3 = 9t \\ x-2y = -6t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3t-1 \\ x = 2y-6t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3t-1 \\ x = 6t-2-6t \\ z = t \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1+3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. \mathcal{D} a pour vecteur directeur $\vec{u}(0; 3; 1)$ et le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{v}(2; -1; 2)$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3+2 = -1 \neq 0$, ces vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc la droite \mathcal{D} n'est pas parallèle au plan (ABC).

Le point commun est tel que $x = -2, y = 3t-1, z = t$ et $2x - y + 2z + 2 = 0 \iff -4 - 3t + 1 + 2t + 2 = 0 \iff -1 = t$.

Le point commun à \mathcal{D} et au plan (ABC) a pour coordonnées $(-2; -4; -1)$.

5. a. $M(x; y; z) \in \mathcal{S} \iff \Omega M^2 = 3^2 = 9 \iff (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9 \iff M(x; y; z) \in \mathcal{S} \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 2 = 0$.

b. $M(-2; 3t-1; t) \in \mathcal{S} \iff (-2)^2 + (3t-1)^2 + t^2 - 2 \times (-2) + 6(3t-1) - 2t + 2 = 0 \iff 4 + 9t^2 + 1 - 6t + t^2 + 4 + 18t - 6 - 2t + 2 = 0 \iff 10t^2 + 10t + 5 = 0 \iff 2t^2 + 2t + 1 = 0$.

On a $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: il n'y a pas de solution : conclusion la droite \mathcal{D} ne coupe pas la sphère.

- c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère \mathcal{S} , c'est démontrer que la distance du point Ω au plan (ABC) est égal au rayon de la sphère.

$$\text{Or } d(\Omega, (\text{ABC})) = \frac{|2 \times 1 - (-3) + 2 \times 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2+3+2+2}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3 = r.$$