∽ Corrigé du Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾
Mars 2016

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **6 points**

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.
Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;

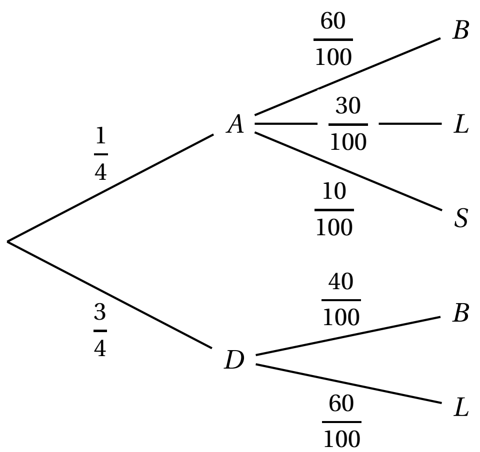
D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;

B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;

L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;

S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. On peut représenter les données de l'exercice sous forme d'un arbre pondéré :



a. L'événement « la médaille tirée est argentée et représente le château de Langeais » est $A \cap L$.

$P(A \cap L) = P(A) \times P_A(L) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{40}$

b. On cherche $P(L)$; d'après la formule des probabilités totales :
$P(L) = P(A \cap L) + P(D \cap L) = P(A) \times P_A(L) + P(D) \times P_D(L) = \dfrac{3}{40} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{40} + \dfrac{18}{40} = \dfrac{21}{40}$

c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, la probabilité que celle-ci soit dorée est $P_L(D)$:

$$P_L(D) = \dfrac{P(D \cap L)}{P(L)} = \dfrac{\dfrac{3}{4} \times \dfrac{6}{10}}{\dfrac{21}{40}} = \dfrac{\dfrac{18}{40}}{\dfrac{21}{40}} = \dfrac{18}{21} = \dfrac{6}{7}$$

2. Il n'y a pas de médaille dorée représentant le château de Saumur donc la probabilité que la médaille tirée soit argentée sachant qu'elle représente le château de Saumur est de 1.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes. On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.

On note C l'évènement « la médaille est conforme ».

La probabilité qu'une médaille soit conforme est $P(C) = P(9{,}9 \leqslant X \leqslant 10{,}1)$ et la probabilité qu'une médaille soit non conforme est $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C)$.

D'après la calculatrice, $P(C) = P(9{,}9 \leqslant X \leqslant 10{,}1) \approx 0{,}904$. Donc $P\left(\overline{C}\right) \approx 0{,}096$.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.

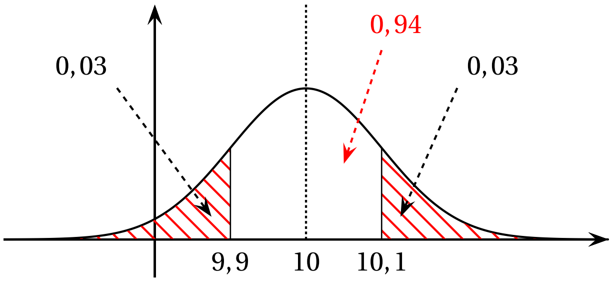
a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{Y - 10}{\sigma}$.

D'après le cours, on peut dire que la variable Z suit la loi normale centrée réduite.

b. Cette machine produit 6 % de pièces non conformes, ce qui veut dire que $P\left(\overline{C}\right) = 0{,}06$.

Une médaille est non conforme si $(Y < 9{,}9)$ ou $(Y > 10{,}1)$; la variable aléatoire Y est de moyenne 10 donc, par symétrie, $P(Y < 9{,}9) = P(Y > 10{,}1)$.

Il faut donc chercher l'écart type σ pour que $P(Y < 9{,}9) = \dfrac{0{,}06}{2}$, autrement dit pour que $P(Y < 9{,}9) = 0{,}03$.



$Y < 9,9 \iff Y - 10 < 9,9 - 10 \iff \dfrac{Y-10}{\sigma} < \dfrac{9,9-10}{\sigma} \iff Z < \dfrac{-0,1}{\sigma}$ car $\sigma > 0$

Donc $P(Y < 9,9) = 0,03 \iff P\left(Z < -\dfrac{0,1}{\sigma}\right) = 0,03$ où Z suit la loi normale centrée réduite.

On cherche β tel que $P(Z < \beta) = 0,03$ à la calculatrice, et on trouve $\beta \approx -1,8808$.

Donc $-\dfrac{0,1}{\sigma} = -1,8808 \iff \sigma \approx 0,053$

Pour que la machine M_2 produise 6 % de pièces non conformes, il faut que $\sigma \approx 0,053$.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 3 points

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0~;~16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$$

Dans un repère du plan $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données en **annexe 1**.

Pour tout x, $\cos(x) \leqslant 1$ donc $1 - \cos(x) \geqslant 0$; on en déduit que $g(x) \geqslant f(x)$ pour tout x de $[0~;~16]$.

On cherche les abscisses des points A et B ; comme ce sont des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, ces abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$:

$f(x) = g(x) \iff \ln(x+1) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x) \iff \cos(x) = 1 \iff x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0 ; 16]$ sont 0, 2π et 4π.

On en déduit que $x_{\text{A}} = 2\pi$ et $x_{\text{B}} = 4\pi$.

Comme sur $[0 ; 16]$, $g(x) \geqslant f(x)$:

- l'aire de la surface **1** est donnée par $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_{x_{\text{O}}}^{x_{\text{A}}} \left[g(x) - f(x)\right] \text{d}x = \int_0^{2\pi} \left[g(x) - f(x)\right] \text{d}x$
- l'aire de la surface **2** est donnée par $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_{x_{\text{A}}}^{x_{\text{B}}} \left[g(x) - f(x)\right] \text{d}x = \int_{2\pi}^{4\pi} \left[g(x) - f(x)\right] \text{d}x$

$g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$ qui a pour primitive $x \longmapsto x - \sin(x)$. Donc :

- $\mathscr{A}_1 = [x - \sin(x)]_0^{2\pi} = [2\pi - \sin(2\pi)] - [0 - \sin(0)] = 2\pi$
- $\mathscr{A}_2 = [x - \sin(x)]_{2\pi}^{4\pi} = [4\pi - \sin(4\pi)] - [2\pi - \sin(2\pi)] = 4\pi - 2\pi = 2\pi$

Les deux surfaces hachurées sur le graphique ont donc la même aire égale à 2π.

EXERCICE 3 **Commun à tous les candidats** **6 points**

Dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation $\dfrac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\dfrac{1}{2}mz-3=0$.

1. Le point A(1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si
$\dfrac{1}{4}m^2x_{\text{A}}+(m-1)y_{\text{A}}+\dfrac{1}{2}mz_{\text{A}}-3=0 \iff \dfrac{1}{4}m^2+(m-1)+\dfrac{1}{2}m-3=0 \iff$
$\dfrac{1}{4}m^2+\dfrac{3}{2}m-4=0 \iff m^2+6m-16=0$

$\Delta=36+64=100$ donc cette équation admet 2 solutions $m'=\dfrac{-6+10}{2}=2$ et
$m''=\dfrac{-6-10}{2}=-8$.

Le point A appartient au plan P_m pour $m=2$ ou $m=-8$.

2. Le plan P_1 a pour équation $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}z-3=0$ ou encore $x+2z-12=0$.

Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$.

On cherche l'intersection de ces deux plans :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z-12 &=& 0\\ 4x-5y-2z-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -4(12-2z)+2z+3\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -48+8z+2z+3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -45+10z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ y &=& 9-2z\end{array}\right.$$

En posant $z=t$, on peut dire que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

3. a. Le plan P_0 a pour équation $-y-3=0$.

Pour déterminer l'intersection du plan P_0 et de la droite (d), on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\\ -y-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ -3 &=& 9-2t\\ z &=& t\\ y &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ t &=& 6\\ z &=& t\\ y &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& -3\\ z &=& 6\\ t &=& 6\end{array}\right.$$

L'intersection du plan P_0 et de la droite (d) est donc le point B $(0 ; -3 ; 6)$.

b. Le plan P_m a pour équation $\dfrac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\dfrac{1}{2}mz-3=0$.

On regarde si les coordonnées du point B vérifient l'équation du plan P_m :

$\dfrac{1}{4}m^2x_{\text{B}}+(m-1)y_{\text{B}}+\dfrac{1}{2}mz_{\text{B}}-3=0+(m-1)(-3)+\dfrac{1}{2}m\times 6-3=-3m+3+3m-3=0$

Donc le point B appartient au plan P_m, quelle que soit la valeur du réel m.

c. Soit H $(a ; b ; c)$ un point qui appartient au plan P_m pour tout réel m.

Cela signifie que les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan pour tout réel m :

$\dfrac{1}{4}m^2a+(m-1)b+\dfrac{1}{2}mc-3=0$

On donne à m des valeurs particulières :

- Pour $m = 0$, on obtient $-b-3 = 0$ donc $b = -3$.
- Pour $m = 2$, on obtient $a+(2-1)(-3)+c-3 = 0$, soit $a+c = 6$.
- Pour $m = -2$, on obtient $a+(-2-1)(-3)-c-3 = 0$, soit $a-c = -6$.

On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+c &=& 6\\ a-c &=& -6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a & =& 0\\ a+c &=& 6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0\\ c &=& 6\end{array}\right.$

Le point H a donc pour coordonnées $(0\,;\,-3\,;\,6)$ donc c'est le point B.

Le point B est l'unique point appartenant à tous les plans P_m quelle que soit la valeur de m.

Autre méthode géométrique :

L'existence du point a été montrée en 3. b. Nous allons montrer son unicité.

On sait (question 2) que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d).

On sait (question 3. a.) que P_0 et (d) sont sécants en B.

Le point B est donc l'unique point appartenant à P_0, P_1 et P_{-4}.

Si un point appartient à P_m quel que soit m réel, alors il appartient en particulier à P_0, P_1 et P_{-4}. C'est donc l'unique point B.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leqslant m \leqslant 10 \text{ et } -10 \leqslant m' \leqslant 10$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Le plan P_1 a pour équation $x+2z-12 = 0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_1\ (1\,;\,0\,;\,2)$.

Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3 = 0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_{-4}\ (4\,;\,-5\,;\,-2)$.

$\overrightarrow{n}_1 . \overrightarrow{n}_{-4} = 1\times 4+0+2\times(-2) = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux.

Les plans P_1 et P_{-4} sont donc perpendiculaires.

b. Le plan P_m a pour équation $\dfrac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\dfrac{1}{2}mz-3 = 0$ donc pour vecteur normal
$\overrightarrow{n}\ \left(\dfrac{1}{4}m^2\,;\,m-1\,;\,\dfrac{1}{2}m\right)$.

Le plan $P_{m'}$ a pour équation $\dfrac{1}{4}m'^2x+(m'-1)y+\dfrac{1}{2}m'z-3 = 0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}'\ \left(\dfrac{1}{4}m'^2\,;\,m'-1\,;\,\dfrac{1}{2}m'\right)$.

les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux :

$P_m \perp P_{m'} \iff \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n}' \iff \overrightarrow{n} . \overrightarrow{n}' = 0 \iff$
$\dfrac{1}{4}m\times\dfrac{1}{4}m'+(m-1)(m'-1)+\dfrac{1}{2}m\times\dfrac{1}{2}m' = 0 \iff$
$\left(\dfrac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\dfrac{mm'}{4} = 0$

c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$
	Alors Afficher $\left(m\,;\,m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Cet algorithme affiche tous les couples $(m; m')$ d'entiers compris entre -10 et 10 pour lesquels $\left(\dfrac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\dfrac{mm'}{4}=0$, c'est-à-dire pour lesquels les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\,;\,1)$, $(0\,;\,1)$ et $(5\,;\,-4)$.
Le nombres m et m' jouant le même rôle, les autres couples seront $(1\,;\,-4)$, $(1\,;\,0)$ et $(-4\,;\,5)$.
Les six couples seront affichés dans cet ordre :

$$(-4\,;\,1)\,;\,(-4\,;\,5)\,;\,(0\,;\,1)\,;\,(1\,;\,-4)\,;\,(1\,;\,0)\,;\,(5\,;\,-4)$$

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout n, par $z_0=1$ et $z_{n+1}=\left(1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. $\left|1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|^2=1^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$ donc $\left|1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)$

On cherche θ tel que $\left\{\begin{array}{rcl}\cos\theta&=&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta&=&\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ donc $\theta=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

On a donc $1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. $z_1=\left(1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_0=\left(1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times 1=1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$z_2=\left(1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_1=\left(1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=\dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

2. a. Soit P_n la propriété $z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$

- Pour $n=0$: $z_0=1$ et $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0\times\frac{\pi}{6}}=1$; donc P_0 est vraie.

- On suppose P_p vraie pour $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $z_p = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \text{e}^{\,\text{i}p\frac{\pi}{6}}$

$z_{p+1} = \left(1+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_p = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{e}^{\,\text{i}\frac{\pi}{6}} \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \text{e}^{\,\text{i}p\frac{\pi}{6}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{p+1} \text{e}^{\,\text{i}(p+1)\frac{\pi}{6}}$

- La propriété es vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \text{e}^{\text{i}n\frac{\pi}{6}}$.

b. Les points O d'affixe 0, et A_0 d'affixe $z_0 = 1$ sont situés sur l'axe des réels ; donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si le point A_n est sur l'axe des réels, autrement dit si son affixe est réelle, donc si son argument vaut $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Un argument de z_n est $n\dfrac{\pi}{6}$; on doit donc avoir : $n\dfrac{\pi}{6} = k\pi$ ce qui équivaut à $n = 6k$.

Les points O, A_0 et A_n sont alignés si n est un multiple de 6.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a. $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ donc d_n représente la distance entre les points A_n et A_{n+1} : $d_n = A_nA_{n+1}$

b. $d_0 = z_1 - z_0 = \left|1+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c. Pour tout n

$$\begin{array}{rrcl}
 & z_{n+2} & = & \left(1+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{n+1}\\
 & z_{n+1} & = & \left(1+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{n}\\ \hline
\text{Par soustraction} & z_{n+2} - z_{n+1} & = & \left(1+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)
\end{array}$$

d. On en déduit que :

$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}d_n$

On sait que $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc on peut dire que la suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $q = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

D'après les propriétés des suites géométriques, $d_n = d_0 \times q^n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ pour tout n.

4. a. D'après les questions précédentes, pour tout n :

$|z_n| = \left|\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \text{e}^{\,\text{i}n\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times \left|\text{e}^{\,\text{i}n\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times 1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ donc $|z_n|^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

De même $|z_{n+1}| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$ donc

$|z_{n+1}|^2 = \left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$d_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ donc $d_n^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = |z_{n+1}|^2$

b. On sait que $|z_{n+1}| = OA_{n+1}$, que $|z_n| = OA_n$ et que $d_n = A_nA_{n+1}$
Donc $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$ équivaut à $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c. Voir construction de A_5 en annexe.

d.
- Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4 donc le point A_5 est sur la droite d perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4. On trace cette perpendiculaire d comme médiatrice du segment ayant pour extrémités deux points i et j de la droite (OA_4) symétriques autour de A_4. (voir la figure)
- z_5 a pour argument $\dfrac{5\pi}{6}$ et z_3 a pour argument $\dfrac{3\pi}{6}$; donc l'angle $\left(\overrightarrow{OA_3}\,,\,\overrightarrow{OA_5}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$. On trace donc le triangle équilatéral direct OA_3A_3' et le point A_5 appartient à (OA_3').

Le point A_5 est à l'intersection des droites d et (OA_3').
On peut également construire ce point A_5 à l'intersection de la droite (OA_3') et du cercle de diamètre $[\mathrm{O}A_6]$.

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

1. La lettre L correspond à $x = 11$; $7 \times 11 + 5 = 82$ qui a pour reste 4 dans la division par 26.
   Le nombre 4 correspond à E donc la lettre L est codée E.

2. **a.** Soit k un entier relatif; $k \equiv 7x\ [26] \implies 15k \equiv 15\times 7x\ [26]$

 Or $15\times 7 = 105 = 4\times 26+1$ donc $105 \equiv 1\ [26]$ et $105x \equiv x\ [26]$

 Donc $k \equiv 7x\ [26] \implies 15k \equiv x\ [26]$

 b. Soit k un entier relatif; $15k \equiv x\ [26] \implies 7\times 15k \equiv 7x\ [26]$

 Or, on a vu que $7\times 15 = 105 \equiv 1\ [26]$ donc $105k \equiv k\ [26]$

 Donc $15k \equiv x\ [26] \implies k \equiv 7x\ [26]$

 On a donc démontré que : $15k \equiv x\ [26] \iff k \equiv 7x\ [26]$

 c. $y \equiv 7x+5\ [26] \iff y-5 \equiv 7x\ [26]$

 $\iff 15(y-5) \equiv x\ [26]$ voir question précédente avec $k = 7y-5$

 $\iff 15y-75 \equiv x\ [26]$

 Or $-75 = 26\times(-3)+3$ donc $-75 \equiv 3\ [26]$ et donc $15y-75 \equiv 15y+3\ [26]$

 On en déduit que $15y-75 \equiv x\ [26] \iff 15y+3 \equiv x\ [26]$ et donc que

 $y \equiv 7x+5\ [26] \iff 15y+3 \equiv x\ [26]$

3. D'après les questions précédentes, pour **décoder** une lettre, on cherche à quel nombre y elle correspond, puis on détermine x entre 0 et 25 tel que $y \equiv 7x+5\ [26]$ donc tel que $x \equiv 15y+3\ [26]$.

 La lettre F correspond à $y = 5$; $15y+3 = 78$ qui a pour reste 0 dans la division par 26.

 Le nombre 0 correspond à la lettre A donc le décodage de la lettre F donne la lettre A.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 7a_n+5$ et $b_{n+1} = 15b_n+3$.

Soit P_n la propriété : $a_n = \left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^n - \dfrac{5}{6}$

- Pour $n = 0$, $\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^0 - \dfrac{5}{6} = a_0+\dfrac{5}{6}-\dfrac{5}{6} = a_0$; donc P_0 est vérifiée.
- On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$; c'est-à-dire $a_n = \left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^n - \dfrac{5}{6}$

 $a_{n+1} = 7a_n+5 = 7\left(\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^n - \dfrac{5}{6}\right)+5 = \left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^{n+1} - 7\times\dfrac{5}{6}+5 =$

 $\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^{n+1} - \dfrac{35}{6}+\dfrac{30}{6} = \left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^{n+1} - \dfrac{5}{6}$

 Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n,

$b_n = \left(b_0+\dfrac{3}{14}\right)\times 15^n - \dfrac{3}{14}$.

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A. Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H. Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.
On veut décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.
Première méthode
On cherche une lettre qui codée 6 fois de suite donne la lettre Q. Autrement dit, il suffit de décoder 6 fois de suite la lettre Q pour obtenir le résultat demandé.

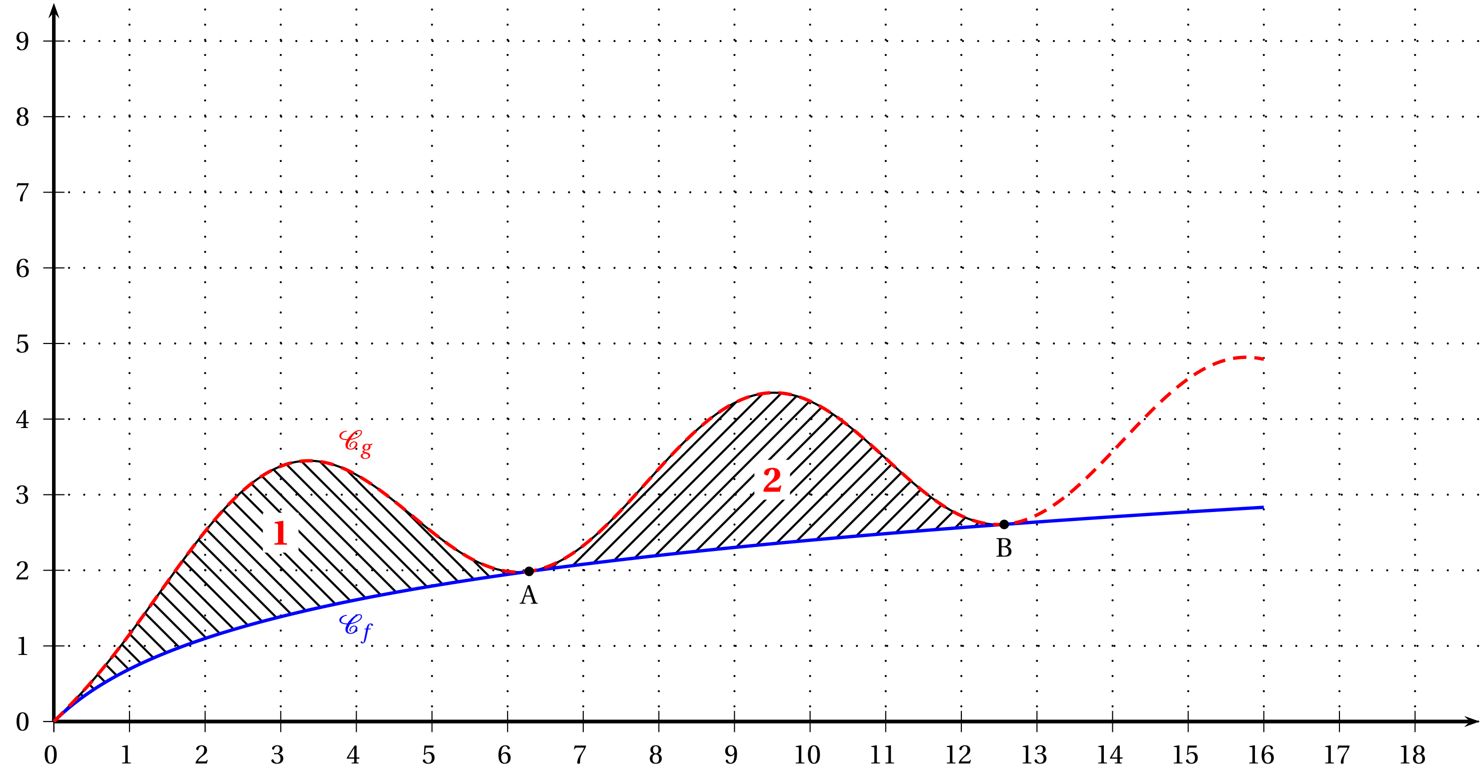
lettre	y	$15y+3$	reste x	lettre
Q	16	243	9	J
J	9	138	8	I
I	8	123	19	T
T	19	288	2	C
C	2	33	7	H
H	7	108	4	E

Donc la lettre Q se décode en E.

Deuxième méthode
On peut utiliser les résultats de la partie **B.**
On doit appliquer 6 fois la fonction $x \longmapsto 15x+3$ successivement au nombre 16 (correspondant à Q), puis à son image, puis à l'image de l'image, etc.
On cherche donc, avec les notations de la partie **B**, le nombre b_6 sachant que $b_0 = 16$.
$b_6 = \left(16 + \dfrac{3}{14}\right) \times 15^6 - \dfrac{3}{14} = 184\,690\,848$
Le reste de la division de 184 690 848 par 26 est 4 qui correspond bien à E.

Remarque
Le mot IYYQ se décode en CODE par le processus détaillé dans la partie ***C****.*

ANNEXE 1 de l'exercice 2



À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 4