∽ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2017 ∾

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Partie A

1. On justifie les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$			$\frac{1}{\mathrm{e}}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

- La dérivée de f est $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
  Pour tout s, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, et elle est strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
- $f(0) = 0$
- On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.
  $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$; on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

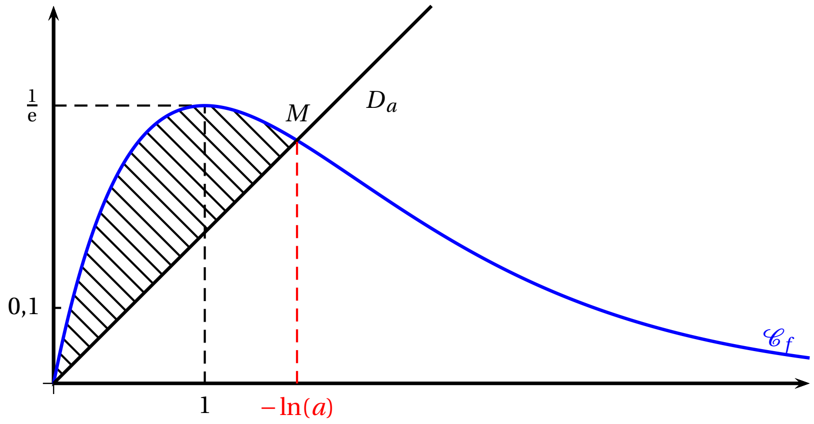
2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
$F'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-1+x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$
Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On considère la droite D_a d'équation $y = ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe $\mathscr{C}_f$. On note x_M l'abscisse du point M.
On note $\mathscr{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_M$.

1. La droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ se coupent en des points dont les abscisses sont solutions de l'équation $ax = x\mathrm{e}^{-x}$. On résout cette équation :
$ax = x\mathrm{e}^{-x} \iff ax - x\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff x(a - \mathrm{e}^{-x}) = 0 \iff x = 0$ ou $a - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff$ $x = 0$ ou $a = \mathrm{e}^{-x} \iff x = 0$ ou $\ln(a) = -x \iff x = 0$ ou $x = -\ln(a)$.
Donc la droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ se coupent au point O et en un autre point d'abscisse $-\ln(a)$.

On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M = -\ln(a)$ et que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$.



2. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$, donc l'aire $\mathscr{H}(a)$ du domaine hachuré est $\displaystyle\int_0^{-\ln(a)} \big(f(x)-ax\big)\,\mathrm{d}x$.

$$\mathscr{H}(a)=\int_0^{-\ln(a)} \big(f(x)-ax\big)\,\mathrm{d}x=\int_0^{-\ln(a)} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{-\ln(a)} ax\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_0^{-\ln(a)}-\left[a\frac{x^2}{2}\right]_0^{-\ln(a)}$$

$$=\Big[(\ln(a)-1)\,\mathrm{e}^{-(-\ln(a))}-(-1)\,\mathrm{e}^0\Big]-\left[a\frac{(\ln(a))^2}{2}-0\right]=a\ln(a)-a+1-\frac{1}{2}\,a\,(\ln(a))^2$$

3. Soit la fonction $\mathscr{H}$ définie sur $]0\,;\,1]$ par $\mathscr{H}(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}x(\ln(x))^2+1-x$.
On admet que $\mathscr{H}$ est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.

x	0	1
$\mathscr{H}(x)$	‖ 1	↘ 0

La fonction $\mathscr{H}$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. D'après le tableau de variations, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\mathscr{H}(x)=1$ et $\mathscr{H}(1)=0$. Or $0{,}5\in\,]0\,;\,1[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathscr{H}(x)=0{,}5$ admet une solution unique α dans $]0\,;\,1[$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

```
VARIABLES :        A, B et C sont des nombres ;
                   p est un entier naturel.
INITIALISATION :   Demander la valeur de p
                   A prend la valeur 0
                   B prend la valeur 1
TRAITEMENT :       Tant que B − A > 10^(−p)
                   |  C prend la valeur (A + B)/2
                   |  Si H(C) > 0,5
                   |     |  Alors A prend la valeur de C
                   |     |  Sinon B prend la valeur de C
                   |  Fin de la boucle Si
                   Fin de la boucle Tant que
SORTIE :           Afficher A et B.
```

Cet algorithme, dit de « dichotomie », permet de déterminer un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-p} de la solution de l'équation $\mathcal{H}(x) = 0,5$; le nombre A est la borne inférieure de l'encadrement, le nombre B en est la borne supérieure.

5. On utilise la calculatrice pour déterminer les encadrements suivants :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \mathcal{H}(x) = 1\\ \mathcal{H}(0,1) \approx 0,40 < 0,5\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in \left]0\,;\,0,1\right[\qquad \left.\begin{array}{l}\mathcal{H}(0,06) \approx 0,534 > 0,5\\ \mathcal{H}(0,07) \approx 0,496 < 0,5\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in \left]0,06\,;\,0,07\right[$$

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 3 points

1. La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$.

On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne $E(T)$ de quatre ans ; or $\lambda = \dfrac{1}{E(T)}$ donc $\lambda = 0,25$.

D'après le cours, si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(X < t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On cherche $P_{(T\geqslant 3)}(T \geqslant 3+2)$.

La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{(T\geqslant 3)}(T \geqslant 3+2) = P(T \geqslant 2)$.

$P(T \geqslant 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,25\times 2}\right) = \mathrm{e}^{-0,25\times 2} \approx 0,61 \neq 0,39$.

Cette affirmation est **fausse**.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

On résout dans $\mathbf{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$.

$z^3 - 3z^2 + 3z = z(z^2 - 3z + 3)$ donc (E) $\iff z(z^2 - 3z + 3) = 0 \iff z = 0$ ou $z^2 - 3z + 3 = 0$

On résout dans $\mathbf{C}$ l'équation (E') : $z^2 - 3z + 3 = 0$: $\Delta = 9 - 12 = -3$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Soit A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2.

- $\mathrm{OA} = |z_1| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$
- $\mathrm{OB} = |z_2| = |z_1|$ car z_1 et z_2 sont deux nombres complexes conjugués, donc $\mathrm{OB} = \sqrt{3}$.
- $\mathrm{AB} = |z_2 - z_1| = \left|\dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right| = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

OA = OB = AB donc les trois solutions de l'équation (E) sont les affixes de trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Cette affirmation est **vraie**.

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 4 points

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme.

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.
On veut tester l'hypothèse « il y a une chance sur deux ($p = 0{,}5$) que le thème A soit évalué le jour de l'examen » dans un échantillon de taille $n = 34$.
$n = 34 \geqslant 30$ et $np = n(1-p) = 17 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion que le thème A soit évalué le jour de l'examen :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}5 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5\times 0{,}5}}{\sqrt{34}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5\times 0{,}5}}{\sqrt{34}}\right] \approx [0{,}33\,;\,0{,}67]$$

La fréquence dans l'échantillon est de $f = \dfrac{22}{34} \approx 0{,}65 \in I$ donc il n'y a pas de raison de rejeter l'affirmation proposée.

Partie B

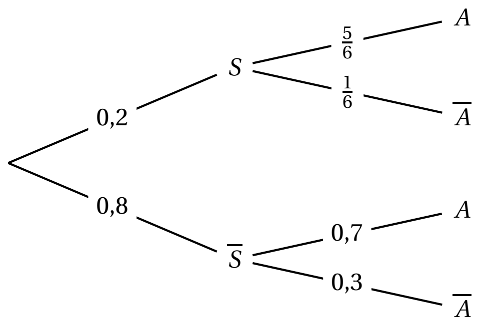
Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.
Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

- 30 % des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\dfrac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que 20 % des étudiants participent au stage.
On note :

- S l'évènement « l'étudiant a suivi le stage » et $\overline{S}$ son évènement contraire ;
- A l'évènement « il y a un exercice portant sur le thème A » et $\overline{A}$ son évènement contraire.

On établit un arbre de probabilité résumant la situation :



On cherche $P_{\overline{A}}(S)$ c'est-à-dire $\dfrac{P(S\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}$.

D'après l'arbre : $P(S\cap\overline{A}) = P(S)\times P_S(\overline{A}) = 0{,}2\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{0{,}2}{6} = \dfrac{1}{30}$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(\overline{A}) = P(S\cap\overline{A}) + P(\overline{S}\cap\overline{A}) = \dfrac{1}{30} + 0{,}8\times 0{,}3 = \dfrac{1}{30} + \dfrac{24}{100} = \dfrac{41}{150}$.

$P_{\overline{A}}(S) = \dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{41}{150}} = \dfrac{1}{30} \times \dfrac{150}{41} = \dfrac{5}{41} \approx 0{,}122.$

Partie C

On suppose que la variable aléatoire T, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu = 225$ et d'écart-type σ où $\sigma > 0$. La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de 0,98.

On sait que $P(T \leqslant 235) = 0{,}98$ sachant que T suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type σ.

D'après le cours, si T suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type σ, alors $Z = \dfrac{T-225}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite (moyenne 0 et écart-type 1).

$T \leqslant 235 \iff T-225 \leqslant 10 \iff \dfrac{T-225}{\sigma} \leqslant \dfrac{10}{\sigma}$ car $\sigma > 0$; donc $P(T \leqslant 235) = 0{,}98 \iff P\left(\dfrac{T-225}{\sigma} \leqslant \dfrac{10}{\sigma}\right) = 0{,}98$.

On cherche donc le réel β tel que $P(Z \leqslant \beta) = 0{,}98$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.

On trouve à la calculatrice $\beta \approx 2{,}054$.

On en déduit que $\dfrac{10}{\sigma} \approx 2{,}054$ donc que $\sigma \approx 4{,}9$.

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 3 points

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0. \end{cases}$.

On peut conjecturer que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\dfrac{n}{n+1} = 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose que la propriété est vraie pour un entier k quelconque : $u_k = \dfrac{k}{k+1}$.
  On va démontrer qu'elle est vraie au rang $k+1$ soit $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$.
  $u_{k+1} = \dfrac{1}{2-u_k} = \dfrac{1}{2-\dfrac{k}{k+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{2(k+1)-k}{k+1}} = \dfrac{k+1}{2k+2-k} = \dfrac{k+1}{k+2}$
  Donc la propiété est vraie au rang $k+1$.
- **Conclusion**
  La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire pour tout n. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On peut donc dire que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

On cherche $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$. Pour $n \neq 0$: $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n \times 1}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

EXERCICE 5 **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité** 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\mathrm{I},\,\mathrm{J},\,\mathrm{K})$.
On considère les points $\mathrm{A}(-1\,;\,-1\,;\,0)$, $\mathrm{B}(6\,;\,-5\,;\,1)$, $\mathrm{C}(1\,;\,2\,;\,-2)$ et $\mathrm{S}(13\,;\,37\,;\,54)$.

1. a. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$; $7\times\dfrac{2}{7}=2$ et $-4\times\dfrac{2}{7}\neq 3$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont deux vecteurs directeurs.

b. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}=5\times7+16\times(-4)+29\times1=35-64+29=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
$\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}=5\times2+16\times3+29\times(-2)=10+48-58=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

Si M a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ a pour coordonnées $(x+1\,;\,y+1\,;\,z)$.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{n}\iff\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,.\,\overrightarrow{n}=0\iff 5(x+1)+16(y+1)+29z=0\iff 5x+16y+29z+21=0$

Le plan (ABC) a pour équation $5x+16y+29z+21=0$.

2. a. $\mathrm{AB}^2=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|^2=7^2+(-4)^2+1^2=49+16+1=66$

$\mathrm{AC}^2=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|^2=2^2+3^2+(-2)^2=4+9+4=17$

$\mathrm{BC}^2=(1-6)^2+(2+5)^2+(-2-1)^2=25+49+9=83$

$66+17=83$ ce qui équivaut à $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

b. Le triangle ABC est rectangle en A donc son aire vaut $\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2}=\dfrac{\sqrt{66}\times\sqrt{17}}{2}=\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. a. Les points A, B, C et S sont coplanaires si et seulement si le point S appartient au plan (ABC).

Le plan (ABC) a pour équation $5x+16y+29z+21=0$.

$5x_{\mathrm{S}}+16y_{\mathrm{S}}+29z_{\mathrm{S}}+21=5\times13+16\times37+29\times54+21=2244\neq0$ donc $\mathrm{S}\notin(\mathrm{ABC})$.

Rem. tous les termes de la somme précédente étant supérieurs à zéro la somme ne peut être nulle.

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par S coupe le plan (ABC) en un point noté H.

La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{SH}}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{SH}}$ a pour coordonnées $(5k\,;\,16k\,;\,29k)$ où k est un réel. Si le point H a pour coordonnées $(x_{\mathrm{H}}\,;\,y_{\mathrm{H}}\,;\,z_{\mathrm{H}})$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{SH}}$ a pour coordonnées $(x_{\mathrm{H}}-13\,;\,y_{\mathrm{H}}-37\,;\,z_{\mathrm{H}}-54)$.

On en déduit : $\left\{\begin{array}{l c l} x_{\text{H}} &=& 13+5k\\ y_{\text{H}} &=& 37+16k\\ z_{\text{H}} &=& 54+29k\end{array}\right.$

On exprime que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$\begin{aligned} 5x_{\text{H}}+16y_{\text{H}}+29z_{\text{H}}+21=0 &\iff 5\,(13+5k)+16\,(37+16k)+29\,(54+29k)+21=0\\ &\iff 65+25k+592+256k+1\,566+841\,k+21=0\\ &\iff 2\,244+1\,122k=0 \iff k=-2\end{aligned}$$

Donc le point H a pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{l c l c r} x_{\text{H}} &=& 13+5(-2) &=& 3\\ y_{\text{H}} &=& 37+16(-2) &=& 5\\ z_{\text{H}} &=& 54+29(-2) &=& -4\end{array}\right.$

4. Le volume du tétraèdre SABC est $\dfrac{\text{aire(ABC)}\times \text{SH}}{3}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{SH}}$ a pour coordonnées $(5k\ ;\ 16k\ ;\ 29k)$ donc $(5(-2)\ ;\ 16(-2)\ ;\ 29(-2))=(-10\ ;\ -32\ ;\ -58)$. Donc $\text{SH}^2=(-10)^2+(-32)^2+(-58)^2=4\,488$ et donc $\text{SH}=\sqrt{4\,488}=2\sqrt{1\,122}$.

$\text{aire(ABC)}=\dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}$ donc le volume du tétraèdre est $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}\times 2\sqrt{1\,122}}{3}=\dfrac{1\,122}{3}=374$ unités de volume.