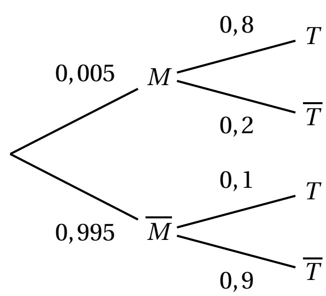
Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. La probabilité est de $\dfrac{5}{1000} = \dfrac{0,5}{100} = 0,005$.
2. **a.** On suppose le cheptel assez important, donc le tirage successif de 10 animaux est une épreuve de Bernoulli de paramètres : $n = 10$ et de probabilité $p = 0,005$.
   On a $\text{E} = n \times p = 10 \times 0,005 = 0,05$.
   b. On a $p(A) = \binom{10}{0} \times 0,005^0 \times 0,995^{10} = 0,995^{10} \approx 0,951$.
   On a $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,995^{10} \approx 0,049$.
3. **a.** On a l'arbre suivant :



   b. On $p(T) = p_M(T) + p_{\overline{M}}(T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,004 + 0,0995 = 0,1035$.
   c. D'après la formule de la probabilité conditionnelle :
   $p_+(M) = \dfrac{p(+ \cap M)}{p(+)} = \dfrac{0,005 \times 0,8}{0,1035} \approx 0,038$.

EXERCICE 2 **4 points**

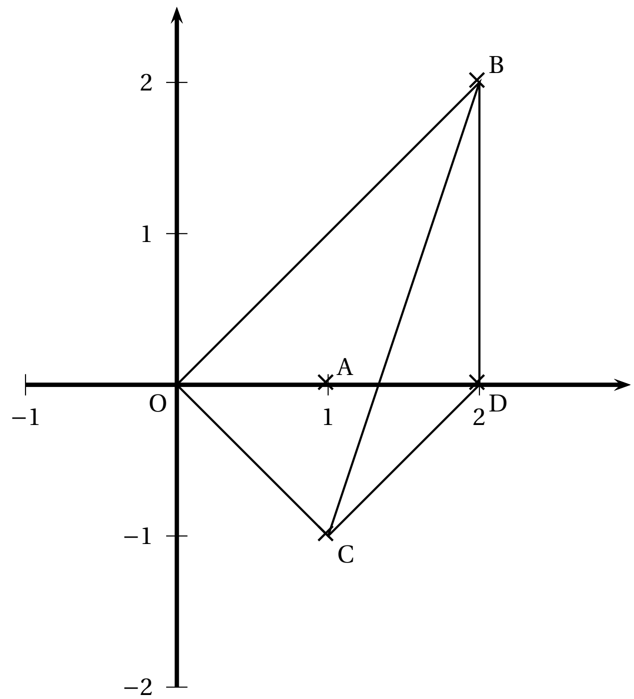
Partie A

1. **a.** $z_1 \in \mathbb{R}$ est solution de $z^3 - (4 + \text{i})z^2 + (7 + \text{i})z - 4 = 0$ si et seulement si
   $z_1^3 - (4 + \text{i})z_1^2 + (7 + \text{i})z_1 - 4 = 0 \iff \begin{cases} \Re\left(z_1^3 - (1 + \text{i})z_1^2 + (7 + \text{i})z_1 - 4\right) = 0 \\ \Im\left(z_1^3 - (1 + \text{i})z_1^2 + (7 + \text{i})z_1 - 4\right) = 0 \end{cases} \iff$
   $\begin{cases} z_1^3 - 4z_1^2 + 7z_1 - 4 = 0 \\ -z_1^2 + z_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1^3 - 4z_1^2 + 7z_1 - 4 = 0 \\ z_1 = 0 \text{ ou } z_1 = 1 \end{cases}$.
   Seul le nombre 1 vérifie la première équation. On a donc $z_1 = 1$.
   b. On doit avoir $z^3 - (4 + \text{i})z^2 + (7 + \text{i})z - 4 = (z - 1)(z - 2 - 2\text{i})(az + b)$.
   En identifiant les termes de plus haut degré on obtient $a = 1$ et en identifiant les termes constants : $-4 = b(2 + 2\text{i}) \iff -2 = b(1 + \text{i}) \iff b = \dfrac{-2}{1 + \text{i}} = \dfrac{-2(1 - \text{i})}{(1 + \text{i})(1 - \text{i})} = -(1 - \text{i}) = -1 + \text{i}$.
   Conclusion $z^3 - (4 + \text{i})z^2 + (7 + \text{i})z - 4 = (z - 1)(z - 2 - 2\text{i})(z - 1 + \text{i})$.
2. La factorisation précédente donne les trois solutions de l'équation :

$$S = \{1 ; 2 + 2\text{i} ; 1 - \text{i}\}.$$

Partie A

1. Figure.



2. On a $\dfrac{2+2\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{2(1+\text{i})}{1-\text{i}} = \dfrac{2(1+\text{i})^2}{(1-\text{i})(1+\text{i}} = (1+\text{i})^2 = 2\text{i}$.
   Le module de ce nombre est 2 et un de ses arguments est $\dfrac{\pi}{2}$.
   Comme $\dfrac{2+2\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{2+2\text{i}-0}{1-\text{i}-0}$, on a en prenant le module $\dfrac{|2+2\text{i}-0|}{|1-\text{i}-0|} = \dfrac{\text{OB}}{\text{OC}} = 2 \iff \text{OB} = 2\text{OC}$.
   En prenant les arguments on obtient $\left(\overrightarrow{\text{OC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : le triangle OBC est rectangle en O.
3. On a de façon immédiate : $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OC}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$. La droite (OA) est donc une bissectrice du triangle (OBC).
4. Par définition de la rotation : $z_{\text{D}} - z_{\text{C}} = (z_{\text{O}} - z_{\text{C}})\,\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} \iff z_{\text{D}} - 1 + \text{i} = (-1+\text{i})(-\text{i})$
   $\iff z_{\text{D}} - 1 + \text{i} = \text{i} + 1 \iff z_{\text{D}} = 2$.
5. On a vu que $\left(\overrightarrow{\text{OC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et on a aussi $\left(\overrightarrow{\text{CD}}\ ;\ \overrightarrow{\text{CO}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Donc les droites (OB) et (CD) sont parallèles : le quadrilatère OCDB est donc un trapèze rectangle (et pas un parallélogramme car OB = 2 OC = 2CD.)

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. L'écriture complexe de la rotation r est :

$$z' = z\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = z\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

   En particulier $z_{\text{B}} = z_{\text{B}}\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. On a $r(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ et $z_{\mathrm{C}} = \left(\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{9}{4} + \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{4} =$

   $z_{\mathrm{C}} = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

   $z_{\mathrm{D}} = r\left(z_{\mathrm{C}}\right) = 3 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{3}}$. Donc D est le symétrique de A autour de O et $z_{\mathrm{D}} = -3$.

   On obtient successivement $z_{\mathrm{E}} = -\dfrac{3}{2} - \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ et $z_{\mathrm{F}} = \dfrac{3}{2} - \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. **a.** F est l'image de A par six rotations de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ soit une rotation de 2π soit l'identité, donc $r(\mathrm{F}) = \mathrm{A}$.

   b. Le polygone est composé de six triangles isocèles d'angle au sommet mesurant $\dfrac{\pi}{3}$, donc de six triangles équilatéraux. On a donc AB = BC = CD = DE = EF = FA = 3. Ce polygone est donc un hexagone régulier ce côté 3 et de centre O.

4. **a.** Si $s'(\mathrm{F}) = \mathrm{C}$, le rapport de cette similitude est : $\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EF}} =$

   $\dfrac{\left|z_{\mathrm{c}} - z_{\mathrm{E}}\right|}{\left|z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{E}}\right|} = \dfrac{\left|-\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|}{\left|\left|\frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|\right.} = \dfrac{\left|3\mathrm{i}\sqrt{3}\right|}{|3|} = \sqrt{3}$.

   Le rapport de la similitude s' est égal à $\sqrt{3}$.

   On a aussi $\left(\overrightarrow{\mathrm{EF}},\ \overrightarrow{\mathrm{EC}}\right) = \arg\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EF}} = \arg(\mathrm{i}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{2}$.

   La transformation $s \circ s'$ est une similitude comme composée de deux similitudes, son rapport étant le produit des rapports, soit $\dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et dont un argument est la somme des arguments de s et s', soit $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{6}$.

   b. Comme AD = 6 et AF = 3, que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AF}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, l'image de D par s est le point C. Mais l'image de F par s' est C.

   Conclusion : l'image de D par $s' \circ s$ est C.

   c. $s' \circ s$ est une similitude directe comme composée de deux similitudes directes : son écriture complexe est donc de la forme $z' = az + b$. On a vu à la question a que $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$.

   On vient de démontrer que $s'(\mathrm{D}) = \mathrm{C} \iff -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2} =$

   $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)(-3) + b \iff b = -\dfrac{15}{4} + \mathrm{i}\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

   L'écriture complexe est donc : $z' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}z - \dfrac{15}{4} + \mathrm{i}\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

5. **a.** On a par définition de la symétrie : $\mathrm{AC} = \mathrm{CA}'$ ou $\mathrm{AC}' = 2\mathrm{AC}$;

   D'autre part part de façon évidente : AC = CE = EA : le triangle (ACE) est équilatéral et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AA}'},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)\dfrac{\pi}{3}$.

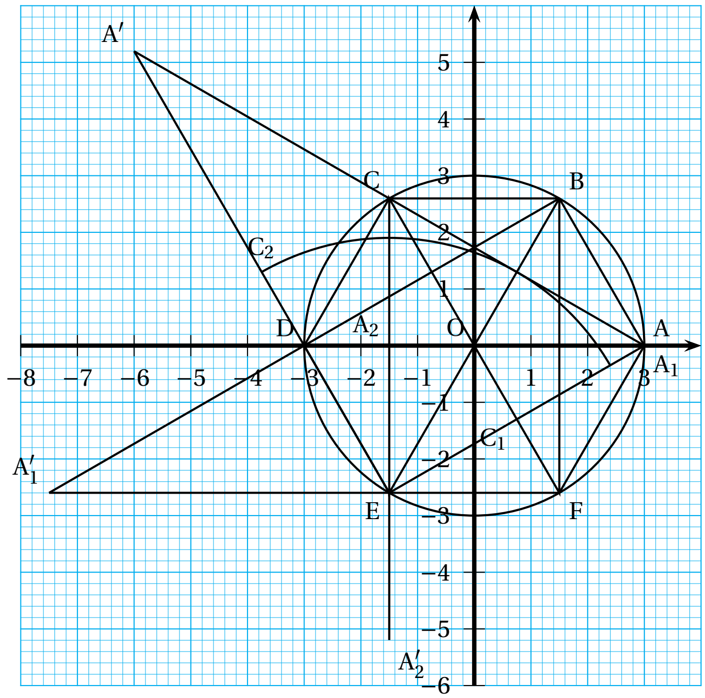
   Conclusion : $s(\mathrm{A}') = \mathrm{E}$.

   Comme E est le centre de la similitude s', on a $s'(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

   b. Par le calcul, on a $\dfrac{z_{\mathrm{A}'} + 3}{2} = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff z_{\mathrm{A}'} = -6 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. En utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$ trouvée au 4 c, on obtient :

   $z_{s' \circ s(\mathrm{A}')} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}\left(-6 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) - \dfrac{15}{4} + \mathrm{i}\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

On trouve : $z_{s'\circ s(\mathrm{A}')} = -\dfrac{3}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = z_{\mathrm{E}}$.



EXERCICE 3 **5 points**

1. a. La fonction f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2}\right)$.

Le signe de f' est donc celui de $x^2 - 2$, car $x^2 > 0$, pour $x > 0$.

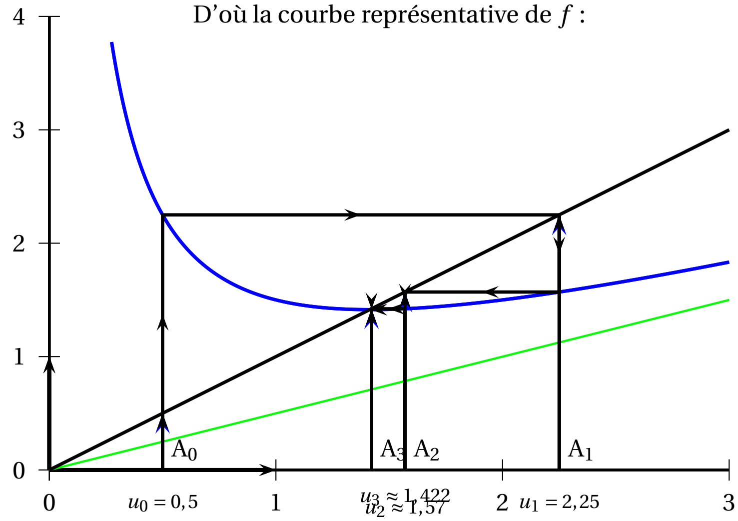
Or sur $]0~;~+\infty[$, $x^2 - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant \sqrt{2}$.

La fonction est :

— décroissante sur $]0~;~\sqrt{2}[$;

— croissante sur $]\sqrt{2}~;~+\infty[$.

D'où la courbe représentative de f :



2. **a.** On a quel que soit n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) = f\left(u_n\right)$.

On vient de voir que $u_1 = f\left(u_0\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2,25 \geqslant \sqrt{2}$. L'affirmation est vraie au rang 1.

Supposons $u_n \geqslant \sqrt{2}$. D'après la question 1, la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}\,;\,+\infty[$. Donc par application de cette croissance $f\left(u_n\right) \geqslant f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$. la relation est héréditaire.

Conclusion : quel que soit $n \geqslant 1, u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Soit $f(x) - x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2-x^2}{2x}$.

On a vu que si $x \geqslant \sqrt{2}$, $2 - x^2 \leqslant 0$.

Conclusion : si $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) - x \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant x$.

c. On a vu que pour $n > 0$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$; donc d'après la question précédente $f\left(u_n\right) \leqslant u_n$; or $f\left(u_n\right) = u_{n+1}$.

Conclusion : $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n > 0$. La suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

d. La suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers un réel supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

3. La fonction f est définie et continue sur $[\sqrt{2}\,;\,+\infty[$; la suite définie par $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ converge vers $\ell = f(\ell)$.

ℓ est donc solution de l'équation $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right) = x \iff 2x = x + \dfrac{2}{x} \iff$

$2x^2 = x^2 + 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \ell$, seule solution supérieure ou égale à $\sqrt{3}$.

La suite $\left(u_n\right)$ converge vers $\ell = \sqrt{2}$.

EXERCICE 4 — 6 points

Première partie

1. $A \in (P_1) \iff -9 + 9 = 0$: vrai ;

$B \in (P_1) \iff 14 - 12 + 9 = 0$: faux ;

$C \in (P_1) \iff -7 + 4 - 6 + 9 = 0$ vrai ;

$D \in (P_1) \iff 7 - 16 + 9 = 0$: vrai.

$\overrightarrow{AC}(-1\,;\,1\,;\,-1)$, $\overrightarrow{AD}(1\,;\,-4\;-3)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (P_1) est le plan (ACD).

2. $A \in (\Delta_1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & -1 + t \\ 0 & = & -8 + 2t \\ 3 & = & -10 + 5t \end{array}\right. \Rightarrow t = 1$ et $t = 4$. Pas de solution. Donc faux ;

$B \in (\Delta_1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & -1 + t \\ 0 & = & -8 + 2t \\ 4 & = & -10 + 5t \end{array}\right. \Rightarrow t = 3$ et $t = 4$. Pas de solution. Donc faux ;

$C \in (\Delta_1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & -1 + t \\ 1 & = & -8 + 2t \\ 2 & = & -10 + 5t \end{array}\right. \Rightarrow t = 2$ et $t = 4,5$. Pas de solution. Donc faux ;

$D \in (\Delta_1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & -1 + t \\ -4 & = & -8 + 2t \\ 0 & = & -10 + 5t \end{array}\right. \Rightarrow t = 2$ et $t = 2$ et $t = 2$. Donc vrai ;

3. Un vecteur $\overrightarrow{u}$ directeur de la droite (Δ_1) a pour coordonnées $\overrightarrow{u}(1\,;\,2\,;\,5)$. $\overrightarrow{v}(7\,;\,4\,;\,-3)$ est un vecteur normal au plan (P_1).

Or $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 7 + 8 - 15 = 0$. La droite (Δ_1) est parallèle au plan (P_1). Or en 1 et 2 on a trouvé que D est un point de (Δ_1) et de (P_1). Donc la droite (Δ_1) est incluse dans (P_1).

4. Un point commun à (Δ_1) et (Δ_2) a ses coordonnées qui vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}-1+t &=& 7+2t'\\ -8+2t &=& 8+4t'\\ -10+5t &=& 8-t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}t-2 &=& 8\\ t-2 &=& 8\\ 5t+t' &=& 18\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}t &=& 4\\ t' &=& -2\end{array}\right.$$

On obtient donc une solution unique qui donne comme coordonnées (3 ; 0 ; 10).
Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes (et donc coplanaires).

5. Un point commun aux deux plans a ses coordonnées qui vérifient le système : $\left\{\begin{array}{lcl}7x+4y-3z+9 &=& 0\\ x-2y &=& 0\end{array}\right.$

En posant $y=t$, on obtient le système équivalent : $\left\{\begin{array}{lcl}y &=& t\\ 7x+4t-3z+9 &=& 0\\ x &=& 2t\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcl}y &=& t\\ x &=& 2t\\ z &=& 6t+3\end{array}\right.$ La bonne réponse est la deuxième.

Deuxième partie

1. On traduit pour un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{A}M}=a\overrightarrow{u} \iff \left\{\begin{array}{lcr}x-0 &=& a\\ y-0 &=& 0\\ z-3 &=& -a\end{array}\right.$

On a donc $M(a\,;\,0\,;\,3-a)$.

De même $\overrightarrow{\text{B}M'}=b\overrightarrow{v} \iff \left\{\begin{array}{lcl}x'-2 &=& 0\\ y'-0 &=& b\\ z'-4 &=& b\end{array}\right.$.

On a donc $M'(2\,;\,b\,;\,4+b)$.
Il s'ensuit que $\overrightarrow{MM'}\,(2-a\,;\,b\,;\,a+b+1)$.

2. La droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D′) si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{u} &=& 0\\ \overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{v} &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}2-a-a-b-1 &=& =0\\ b+a+b+1 &=& =0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}2a+b &=& 1\\ a+2b &=& -1\end{array}\right.$$

3. $\left\{\begin{array}{lcl}2a+b &=& 1\\ a+2b &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}4a+2b &=& 2\\ a+2b &=& -1\end{array}\right. \Rightarrow 3a=3 \iff a=1$. On en déduit que $b=-1$.

On a donc H(1; 0; 2) et H′(2 ; −1 ; 3).
On calcule $\text{HH}'^2=1^2+(-1)^2+1^2=3 \iff \text{HH}'=\sqrt{3}$.

4. **a.** Avec $M(a\,;\,0\,;\,3-a)$ et $M'(2\,;\,b\,;\,4+b)$, on calcule
$MM'^2=\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2=(2-a)^2+b^2+(a+b+1)^2=4-a^2-4a+b^2+a^2+b^2+1+2a+2b+2ab=$
$2a^2+2b^2-2a+2b+2ab+5=a^2+b^2+2aba^2+1-2a+b^2+2b+1+3$.
Soit enfin $MM'^2=(a+b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2+3$.

b. Les trois premiers termes de la somme précédente sont des carrés dont la plus petite valeur est 0. On a donc $MM'^2\geqslant 3$ et cette valeur 3 est atteinte lorsque les trois carrés sont nuls, c'est-à-dire quand $\left\{\begin{array}{lcl}a+b &=& 0\\ a-1 &=& 0\\ b+1 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr}a+b &=& 0\\ a &=& 1\\ b &=& -1\end{array}\right.$

On retrouve donc les valeurs $a=1$ et $b=-1$ et la distance (la plus courte) entre les deux droites : elle vaut $\sqrt{3}$.