


Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie

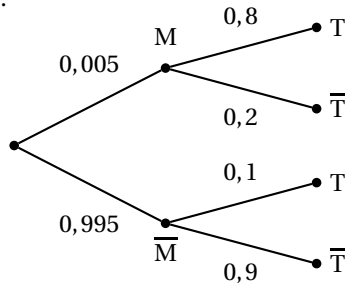
novembre 2006

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. La probabilité est de $\frac{5}{1000} = \frac{0,5}{100} = 0,005$.
2. a. On suppose le cheptel assez important, donc le tirage successif de 10 animaux est une épreuve de Bernoulli de paramètres : $n = 10$ et de probabilité $p = 0,005$.
On a $E = n \times p = 10 \times 0,005 = 0,05$.
- b. On a $p(A) = \binom{10}{0} \times 0,005^0 \times 0,995^{10} = 0,995^{10} \approx 0,951$.
On a $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,995^{10} \approx 0,049$.
3. a. On a l'arbre suivant :



- b. On $p(T) = p_M(T) + p_{\bar{M}}(T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,004 + 0,0995 = 0,1035$.
- c. D'après la formule de la probabilité conditionnelle :

$$p_+(M) = \frac{p(+ \cap M)}{p(+)} = \frac{0,005 \times 0,8}{0,1035} \approx 0,038.$$

EXERCICE 2

4 points

Partie A

1. a. $z_1 \in \mathbb{R}$ est solution de $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$ si et seulement si

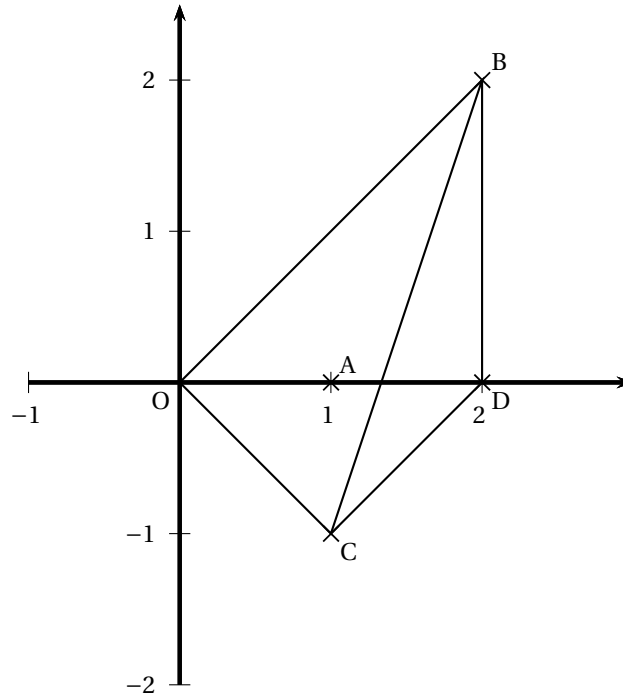
$$z_1^3 - (4+i)z_1^2 + (7+i)z_1 - 4 = 0 \iff \begin{cases} \Re(z_1^3 - (1+i)z_1^2 + (7+i)z_1 - 4) = 0 \\ \Im(z_1^3 - (1+i)z_1^2 + (7+i)z_1 - 4) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} z_1^3 - 4z_1^2 + 7z_1 - 4 = 0 \\ -z_1^2 + z_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1^3 - 4z_1^2 + 7z_1 - 4 = 0 \\ z_1 = 0 \text{ ou } z_1 = 1 \end{cases}.$$
 Seul le nombre 1 vérifie la première équation. On a donc $z_1 = 1$.
- b. On doit avoir $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(az+b)$.
 En identifiant les termes de plus haut degré on obtient $a = 1$ et en identifiant les termes constants : $-4 = b(2+2i) \iff -2 = b(1+i) \iff b = \frac{-2}{1+i} = \frac{-2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{2(1-i)}{2} = -(1-i) = -1+i$.
 Conclusion $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(z-1+i)$.
2. La factorisation précédente donne les trois solutions de l'équation :

$$S = \{1 ; 2 + 2i ; 1 - i\}.$$

Partie A

1. Figure.



2. On a $\frac{2+2i}{1-i} = \frac{2(1+i)}{1-i} = \frac{2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = (1+i)^2 = 2i$.

Le module de ce nombre est 2 et un de ses arguments est $\frac{\pi}{2}$.

Comme $\frac{2+2i}{1-i} = \frac{2+2i-0}{1-i-0}$, on a en prenant le module $\frac{|2+2i-0|}{|1-i-0|} = \frac{OB}{OC} = 2 \iff OB = 2OC$.

En prenant les arguments on obtient $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$. Conclusion : le triangle OBC est rectangle en O.

3. On a de façon immédiate : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{4}$. La droite (OA) est donc une bissectrice du triangle (OBC).

4. Par définition de la rotation : $z_D - z_C = (z_O - z_C)e^{-i\frac{\pi}{2}} \iff z_D - 1 + i = (-1 + i)(-i) \iff z_D - 1 + i = i + 1 \iff z_D = 2$.

5. On a vu que $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}$ et on a aussi $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CO}) = \frac{\pi}{2}$. Donc les droites (OB) et (CD) sont parallèles : le quadrilatère OCDB est donc un trapèze rectangle (et pas un parallélogramme car $OB = 2OC = 2CD$.)

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. L'écriture complexe de la rotation r est :

$$z' = ze^{i\frac{\pi}{3}} = z \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

En particulier $z_B = z_B \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. On a $r(B) = C$ et $z_C = \left(\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{9}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4} =$

$$z_C = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$z_D = r(z_C) = 3 \times e^{i\frac{3\pi}{3}}$. Donc D est le symétrique de A autour de O et $z_D = -3$.

On obtient successivement $z_E = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $z_F = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. a. F est l'image de A par six rotations de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ soit une rotation de 2π soit l'identité, donc $r(F) = A$.
- b. Le polygone est composé de six triangles isocèles d'angle au sommet mesurant $\frac{\pi}{3}$, donc de six triangles équilatéraux. On a donc $AB = BC = CD = DE = EF = FA = 3$. Ce polygone est donc un hexagone régulier ce côté 3 et de centre O.

4. a. Si $s'(F) = C$, le rapport de cette similitude est : $\frac{EC}{EF} =$

$$\frac{|z_C - z_E|}{|z_F - z_E|} = \frac{\left| -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \right|}{\left| \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \right|} = \frac{|3i\sqrt{3}|}{|3|} = \sqrt{3}.$$

Le rapport de la similitude s' est égal à $\sqrt{3}$.

On a aussi $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EC} \right) = \arg \frac{EC}{EF} = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$.

La transformation $s \circ s'$ est une similitude comme composée de deux similitudes, son rapport étant le produit des rapports, soit $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et dont un argument est la somme des arguments de s et s' , soit $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$.

- b. Comme $AD = 6$ et $AF = 3$, que $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} \right) = \frac{\pi}{3}$, l'image de D par s est le point C. Mais l'image de F par s' est C.

Conclusion : l'image de D par $s' \circ s$ est C.

- c. $s' \circ s$ est une similitude directe comme composée de deux similitudes directes : son écriture complexe est donc de la forme $z' = az + b$. On a vu à la question a que $a = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

On vient de démontrer que $s'(D) = C \iff -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) (-3) + b \iff b = -\frac{15}{4} + i\frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

L'écriture complexe est donc : $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} z - \frac{15}{4} + i\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

5. a. On a par définition de la symétrie : $AC = CA'$ ou $AC' = 2AC$;

D'autre part part de façon évidente : $AC = CE = EA$: le triangle (ACE) est équilatéral et $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AE} \right) = \frac{\pi}{3}$.

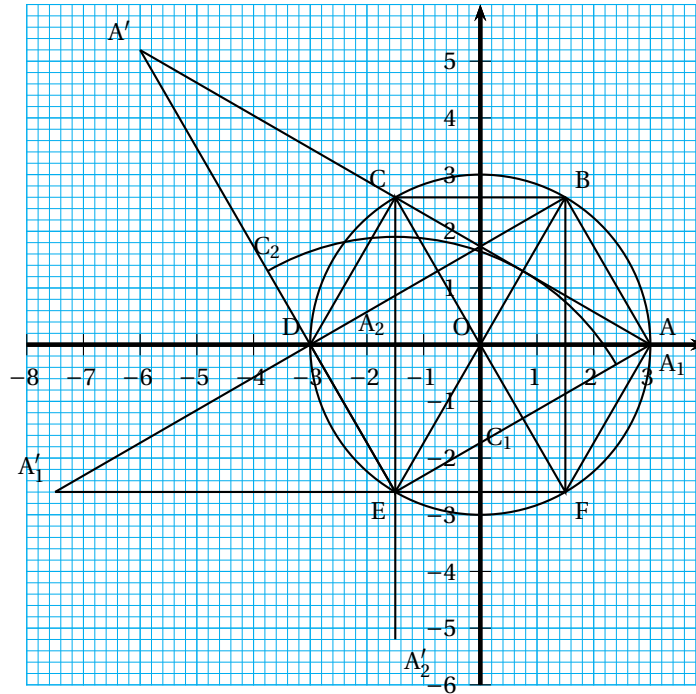
Conclusion : $s(A') = E$.

Comme E est le centre de la similitude s' , on a $s'(E) = E$.

- b. Par le calcul, on a $\frac{z_{A'} + 3}{2} = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \iff z_{A'} = -6 + i\sqrt{3}$. En utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$ trouvée au 4 c, on obtient :

$$z_{s' \circ s(A')} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} (-6 + i\sqrt{3}) - \frac{15}{4} + i\frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

On trouve : $z_{s' \circ s(A')} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_E$.



EXERCICE 3

5 points

1. a. La fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2} \right)$.

Le signe de f' est donc celui de $x^2 - 2$, car $x^2 > 0$, pour $x > 0$.

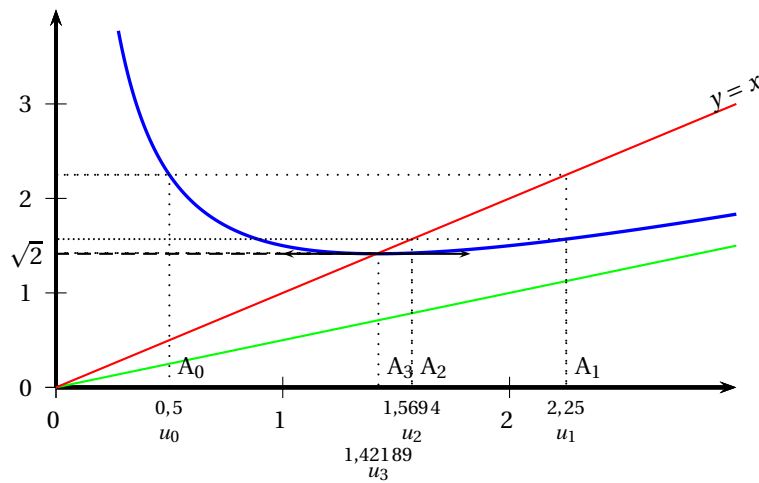
Or sur $]0; +\infty[$, $x^2 - 2 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2}$.

La fonction est :

— décroissante sur $]0; \sqrt{2}[$;

— croissante sur $]\sqrt{2}; +\infty[$.

D'où la courbe représentative de f :



2. a. On a quel que soit n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) = f(u_n)$.

On vient de voir que $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2,25 \geq \sqrt{2}$. L'affirmation est vraie au rang 1.

Supposons $u_n \geq \sqrt{2}$. D'après la question 1, la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$. Donc par application de cette croissance $f(u_n) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$. la relation est héréditaire.

Conclusion : quel que soit $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

$$\text{b. Soit } f(x) - x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = \frac{2 - x^2}{2x}.$$

On a vu que si $x \geq \sqrt{2}$, $2 - x^2 \leq 0$.

Conclusion : si $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) - x \leq 0 \iff f(x) \leq x$.

c. On a vu que pour $n > 0$, $u_n \geq \sqrt{2}$; donc d'après la question précédente $f(u_n) \leq u_n$; or $f(u_n) = u_{n+1}$.

Conclusion : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n > 0$. La suite (u_n) est décroissante.

d. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers un réel supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

3. La fonction f est définie et continue sur $[\sqrt{2}; +\infty[$; la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $\ell = f(\ell)$.

$$\ell \text{ est donc solution de l'équation } \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = x \iff 2x = x + \frac{2}{x} \iff$$

$$2x^2 = x^2 + 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \ell, \text{ seule solution supérieure ou égale à } \sqrt{2}.$$

La suite (u_n) converge vers $\ell = \sqrt{2}$.

EXERCICE 4

6 points

Première partie

$$1. A \in (P_1) \iff -9 + 9 = 0 : \text{vrai};$$

$$B \in (P_1) \iff 14 - 12 + 9 = 0 : \text{faux};$$

$$C \in (P_1) \iff -7 + 4 - 6 + 9 = 0 \text{ vrai};$$

$$D \in (P_1) \iff 7 - 16 + 9 = 0 : \text{vrai}.$$

$\overrightarrow{AC}(-1; 1; -1)$, $\overrightarrow{AD}(1; -4; -3)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (P_1) est le plan (ACD).

$$2. A \in (\Delta_1) \iff \begin{cases} 0 = -1 + t \\ 0 = -8 + 2t \\ 3 = -10 + 5t \end{cases} \Rightarrow t = 1 \text{ et } t = 4. \text{ Pas de solution. Donc}$$

faux;

$$B \in (\Delta_1) \iff \begin{cases} 2 = -1 + t \\ 0 = -8 + 2t \\ 4 = -10 + 5t \end{cases} \Rightarrow t = 3 \text{ et } t = 4. \text{ Pas de solution. Donc}$$

faux;

$$C \in (\Delta_1) \iff \begin{cases} 1 = -1 + t \\ 1 = -8 + 2t \\ 2 = -10 + 5t \end{cases} \Rightarrow t = 2 \text{ et } t = 4,5. \text{ Pas de solution. Donc}$$

faux;

$$D \in (\Delta_1) \iff \begin{cases} 1 = -1 + t \\ -4 = -8 + 2t \\ 0 = -10 + 5t \end{cases} \Rightarrow t = 2 \text{ et } t = 2 \text{ et } t = 2. \text{ Donc vrai};$$

3. Un vecteur \vec{u} directeur de la droite (Δ_1) a pour coordonnées $\vec{u}(1; 2; 5)$.
 $\vec{v}(7; 4; -3)$ est un vecteur normal au plan (P_1) .

Or $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7 + 8 - 15 = 0$. La droite (Δ_1) est parallèle au plan (P_1) . Or en 1 et 2 on a trouvé que D est un point de (Δ_1) et de (P_1) . Donc la droite (Δ_1) est incluse dans (P_1) .

4. Un point commun à (Δ_1) et (Δ_2) a ses coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases} -1 + t = 7 + 2t' \\ -8 + 2t = 8 + 4t' \\ -10 + 5t = 8 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t - 2 = 8 \\ t - 2 = 8 \\ 5t + t' = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 4 \\ t' = -2 \end{cases}$$

On obtient donc une solution unique qui donne comme coordonnées (3 ; 0 ; 10).
Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes (et donc coplanaires).

5. Un point commun aux deux plans a ses coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases} 7x+4y-3z+9 = 0 \\ x-2y = 0 \end{cases}$$

En posant $y = t$, on obtient le système équivalent : $\begin{cases} y = t \\ 7x+4t-3z+9 = 0 \\ x = 2t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ x = 2t \\ z = 6t+3 \end{cases} \quad \text{La bonne réponse est la deuxième.}$$

Deuxième partie

1. On traduit pour un point $M(x ; y ; z)$ l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-0 = a \\ y-0 = 0 \\ z-3 = -a \end{cases}$$

On a donc $M(a ; 0 ; 3-a)$.

De même $\overrightarrow{BM'} = b\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-2 = 0 \\ y'-0 = b \\ z'-4 = b \end{cases}$.

On a donc $M'(2 ; b ; 4+b)$.

Il s'ensuit que $\overrightarrow{MM'}(2-a ; b ; a+b+1)$.

2. La droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D') si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-a-a-b-1 = 0 \\ b+a+b+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 1 \\ a+2b = -1 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} 2a+b = 1 \\ a+2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b = 2 \\ a+2b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = 3 \Leftrightarrow a = 1$. On en déduit que $b = -1$.

On a donc $H(1 ; 0 ; 2)$ et $H'(2 ; -1 ; 3)$.

On calcule $HH'^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \Leftrightarrow HH' = \sqrt{3}$.

4. a. Avec $M(a ; 0 ; 3-a)$ et $M'(2 ; b ; 4+b)$, on calcule $MM'^2 = \|\overrightarrow{MM'}\|^2 = (2-a)^2 + b^2 + (a+b+1)^2 = 4 - a^2 - 4a + b^2 + a^2 + b^2 + 1 + 2a + 2b + 2ab = 2a^2 + 2b^2 - 2a + 2b + 2ab + 5 = a^2 + b^2 + 2ab + 1 - 2a + b^2 + 2b + 1 + 3$.

Soit enfin $MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3$.

b. Les trois premiers termes de la somme précédente sont des carrés dont la plus petite valeur est 0. On a donc $MM'^2 \geq 3$ et cette valeur 3 est atteinte

lorsque les trois carrés sont nuls, c'est-à-dire quand $\begin{cases} a+b = 0 \\ a-1 = 0 \\ b+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

On retrouve donc les valeurs $a = 1$ et $b = -1$ et la distance (la plus courte) entre les deux droites : elle vaut $\sqrt{3}$.