Corrigé du baccalauréat Polynésie 4 mai 2022
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ sujet n° 1

EXERCICE 1 7 points **Thèmes : fonctions, suites**

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(x^2+x+1\right)$.
   La fonction g est dérivable comme composée de fonctions dérivables.
   x^2+x+1 est une fonction positive sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions positives.
   On pose $u(x) = x^2+x+1$ et on a $u'(x) = 2x+1$.
   La fonction dérivée de $\ln(u(x))$ est la fonction $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$: $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ **Réponse d**
2. Pour déterminer si $f(x) = \ln(x)$ admet pour primitive l'une des fonctions citées, il suffit de les dériver.
   Soit $g(x) = x\ln(x) - x$. La fonction g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on a $g'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)+1-1 = \ln(x) = f(x)$.
   La fonction g est donc une primitive de f. **Réponse c**
3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :
   $$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n\left(\frac{1}{3^n}-1\right)}{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\frac{1}{3^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1}$$
   On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}-1 = -1$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n} = 0$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}+1 = 1$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1} = -1$.
   D'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{3}{2} > 1$, donc finalement par produit de limites, la limite de la suite (a_n) est égale à $-\infty$. **Réponse a**
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2\ ;\ 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2]$ est donné par :

x	-2	-1	0	2
variations de f'	1 ↘	0 ↘	-2 ↗	-1

   La fonction f est :

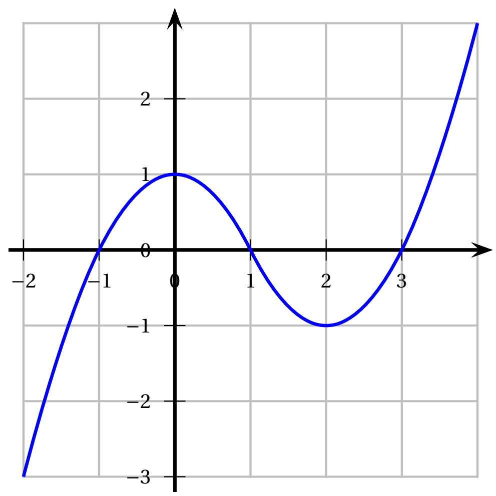
a. convexe sur $[-2\ ;\ -1]$ **b.** concave sur $[0\,;\,1]$

c. convexe sur $[-1\ ;\ 2]$ **d.** concave sur $[-2\ ;\ 0]$

Les variations de la dérivée donnent la convexité de la fonction; si f' est décroissante alors la fonction est concave.

Comme f' est décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$, f est donc concave sur cet intervalle. **Réponse d**

5. On donne ci-dessus la courbe représentant la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.



Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction f.

En 1, $f'(x)$ s'annule en changeant de signe et en passant du positif au négatif, la fonction f va donc admettre un maximum en 1. **Réponse c**

6. Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.

Pour que la fonction seuil fonctionne, il faut que la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ et que le nombre de mois soit augmenté de 1 à chaque exécution de la boucle. **Réponse a**

EXERCICE 2 7 points Thèmes : probabilités

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

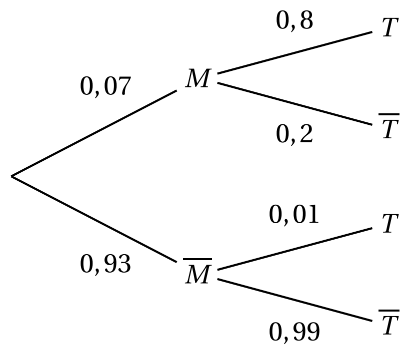
- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Pour calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$, on s'appuie sur un arbre pondéré :



On a donc $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers, d'après les probabilités totales,
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653$.

3. $P_M(T)$ est la probabilité d'avoir un test positif sachant qu'on est malade, et $P_T(M)$ est la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.
Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif c'est-à-dire $P_T(M)$.

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
La probabilité qu'elle soit malade est :$P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx 0,86$

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

a. Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant défini par le test positif, on peut assimiler cette variable aléatoire à une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$

b. La probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif est :
$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8 \approx 0,11$

6. On veut déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %.
Soit n le nombre de personnes testées ; on cherche n pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ soit

$1-0,9347^n \geqslant 0,99 \iff 0,9347^n \leqslant 0,01 \iff n\ln(0,9347) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01}{\ln(0,9347}$.

Or $\dfrac{\ln(0,01}{\ln(0,9347} \approx 68,2$.

Il faut donc tester 69 personnes dans ce pays pour que au moins une ait un test positif.

EXERCICE 3 7 points Thèmes : suites

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1. **a.** $u_1 = u_{n+1} = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{1}{4}$.

   b. On complète les lignes 3 et 6 du script python ci-dessous pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = 1
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = u/(1+u)
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$ car u_n est strictement positif.

   La suite (u_n) est donc décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ positive ou nulle.

4. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

   La fonction f est continue, car dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

   On résout l'équation : $\dfrac{\ell}{1+\ell} = \ell \iff \ell = \ell(1+\ell) \iff 0 = \ell^2 \iff \ell = 0$.

   Donc la suite (u_n) a pour limite 0.

5. **a.** Au vu des premiers termes, on peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

   b. On démontre par récurrence la conjecture précédente. Soit P_n la propriété : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   - Initialisation :

   pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ donc P_0 est vraie.

   - Hérédité :

   Supposons que P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{1}{1+(n+1)}$: la relation est vraie au rang $(n+1)$.

P_{n+1} est donc vraie.

Comme P_0 est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, d'après le principe de récurrence on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

EXERCICE 4 7 points **Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace**

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A(2 ; −1 ; 0) B(1 ; 0 ; −3), C(6 ; 6 ; 1) et E(1 ; 2 ; 4) ;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** On veut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A ; on a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = -4+7-3 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

b. $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 5-6+12 = 11$.

$\text{BA} = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}$ et $\text{BC} = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{77}$

c. On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ arrondie au degré.

On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \text{BA} \times \text{BC} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) &\iff 11 = \sqrt{11} \times \sqrt{77} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\iff 11 = \sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \sqrt{7} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\iff \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

La calculatrice donne $\widehat{\text{ABC}} \approx 68°$ au degré près.

2. **a.** On veut démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.

De plus $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 2 \times (-1) - 1 \times 1 - 1 \times (-3) = -2 - 1 + 3 = 0$

et

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 \times 4 - 1 \times 7 - 1 \times 1 = 8 - 7 - 1 = 0$

$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$.

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. On déduit une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x - y - z + d = 0$, comme A appartient à ce plan, on a : $5 + d = 0$ soit $d = -5$.

Une équation de (ABC) est donc $2x - y - z - 5 = 0$.

c. On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{n}$

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{E}M} = t\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-1 &=& 2t\\ y-2 &=& -t, \quad t\in\mathbb{R}\\ z-4 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t\\ y &=& 2-t, \quad t\in\mathbb{R}.\\ z &=& 4-t\end{array}\right.$$

d. On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1+2t\\ y = 2-t\\ z = 4-t\\ 2x-y-z-5=0\end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+2t\\ y = 2-t\\ z = 4-t\\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+2t\\ y = 2-t\\ z = 4-t\\ 6t-9=0\end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2}\\ x = 4\\ y = \frac{1}{2}\\ z = \frac{5}{2}\end{cases}$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

On va calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

$\text{AC} = \sqrt{4^2+7^2+1^2} = \sqrt{66}$ et donc $\mathscr{B} = \dfrac{\text{AB}\times\text{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{11}\times\sqrt{66}}{2} = \dfrac{11\sqrt{6}}{2}$

HE est la hauteur de la pyramide et $\overrightarrow{\text{HE}}\begin{pmatrix}-3\\ \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

On a par suite $\text{HE} = \sqrt{(-3)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$ puis

$\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{11\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{\dfrac{27}{2}} = \dfrac{11\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}}{3\times 2\times\sqrt{2}} = \dfrac{33}{2} = 16,5$