Corrigé du baccalauréat ES Polynésie (spécialité) 10 septembre 2014

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Réponse **d.** : $-\dfrac{1}{\text{e}}$

   Le coefficient directeur de la tangente est négatif et n'est manifestement pas $-2\,\text{e} \approx -5,4$.
2. Réponse **b.** : positif sur $[3\,;\,4]$

   En effet la fonction g est croissante sur cet intervalle.
3. Réponse **c.** : $-x\,\text{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

   On calcule $H'(x)$ en appliquant la formule $\left(\text{e}^{u(x)}\right)' = u'(x)\,\text{e}^{u(x)}$.
4. Réponse **c.** : $\dfrac{1}{\text{e}}$

   $f\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right) = 1 + \ln\dfrac{1}{\text{e}} = 1 + \ln 1 - \ln \text{e} = 1 - 0 - 1 = 0$
5. Réponse **a.** : 6,5

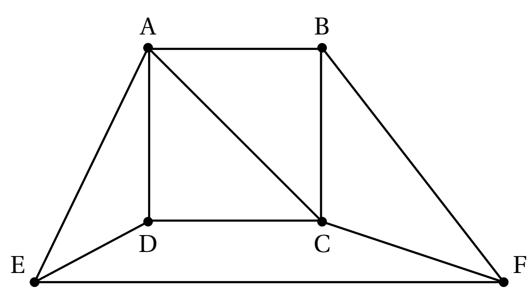
   $k(0) = 5$ et $k(1) = 8$; de plus la fonction k est représentée par une droite. On cherche donc l'aire d'un trapèze de petite base 5, de grande base 8 et de hauteur 1.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.



1. L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets donc ce graphe est d'ordre 6.

   Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	3	4	3	3	3

2. **a.** Partir d'un carrefour, parcourir toutes les avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue et revenir au point de départ, revient à chercher si le graphe admet un cycle eulérien.

   Puisqu'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques, ce graphe est connexe ; il admet un cycle eulérien si et seulement si chaque sommet est de degré pair, ce qui n'est pas le cas.

   Donc il n'existe pas un tel chemin.

   b. Partir d'un carrefour, parcourir toutes les avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue et arriver à un autre carrefour que celui du départ, revient à chercher si le graphe admet un chemin eulérien.

   Or un graphe connexe admet un chemin eulérien si et seulement si chaque sommet est de degré pair, sauf éventuellement deux, ce qui n'est pas le cas.

   Donc il n'existe pas un tel chemin.

Partie B

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.

1. Du sommet D, il n'y a qu'un arc qui part vers A donc on ne peut aller que vers A.

   Du sommet A, il n'y a qu'un arc qui part vers E donc on ne peut aller que vers E.

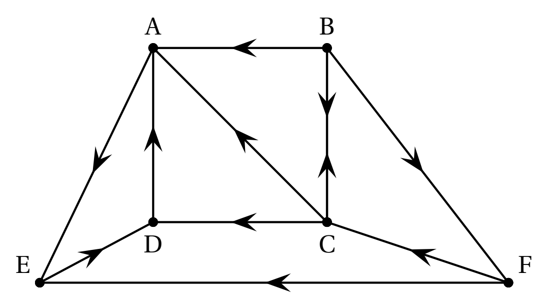
   Du sommet E, il n'y a qu'un arc qui part vers D donc on ne peut aller que vers D.

   Du sommet D, on ne peut se rendre que vers A, vers E ou vers D ; il n'y a donc pas de trajet qui permet d'aller de D à B.

2. La matrice M associée à ce graphe orienté est une matrice carrée d'ordre 6 (le nombre de sommets du graphe) qui ne contient que des 0 et des 1 ; pour i et j deux entiers compris entre 1 et 6, on met 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j s'il existe un arc reliant le sommet numéro i au sommet numéro j, sinon on met 0.

   Donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



3. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a. Le nombre situé à l'intersection de la ligne i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ et de la colonne j $(1 \leqslant j \leqslant 6)$ de la matrice M^3 donne le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet numéro i au sommet numéro j.

b. Le sommet B est le numéro 2, le sommet A est le numéro 1 ; le nombre situé à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne 1 de la matrice M^3 est 3 ; il y a donc 3 chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A.

Ces trois chemins sont : BC – CD – DA ; BF – FC – CA ; BC – CB – BA

c. Le sommet E est le sommet numéro 5 ; le nombre de chemins arrivant en E sont donc situés dans la colonne 5 de la matrice M^3.

Nombre de chemins de longueur 3 allant de A vers E : 0
Nombre de chemins de longueur 3 allant de B vers E : 1
Nombre de chemins de longueur 3 allant de C vers E : 3
Nombre de chemins de longueur 3 allant de D vers E : 0
Nombre de chemins de longueur 3 allant de E vers E : 1
Nombre de chemins de longueur 3 allant de F vers E : 1

Il y a donc au total $0+1+3+0+1+1=6$ chemins de longueur 3 arrivant au point E.

Exercice 3 — 4 points

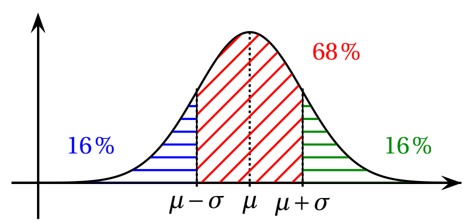
Commun à tous les candidats

Une entreprise produit à la chaîne des jouets pesant en moyenne 400 g. Suite à une étude statistique, on considère que la masse d'un jouet est une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

1. À la calculatrice, on trouve que si X suit la loi normale de paramètres $\mu = 400$ et $\sigma = 11$, $P(385 \leqslant X \leqslant 415) \approx 0{,}83$.

   Cela signifie qu'avec ce modèle il devrait y avoir 83 % des jouets dont la masse en grammes est comprise entre 385 et 415.

2. D'après les propriétés de la loi normale, on sait que $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}68$; on peut donc, pour des raisons de symétrie de la courbe en cloche, déduire que $P(X \leqslant \mu-\sigma) \approx \dfrac{1-0{,}68}{2} \approx 0{,}16$ (en bleu) et que $P(X \geqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}16$ (en vert).



   Or $\mu = 400$ et $\sigma = 11$ donc $\mu+\sigma = 411$, et donc $P(X \geqslant 411) \approx 0{,}16$.

3. Un jouet est commercialisable s'il pèse au maximum 420 g.

   La probabilité qu'un jouet soit commercialisable est $P(X \leqslant 420) \approx 0{,}97$ (à la calculatrice).

4. On cherche à contrôler la qualité des jouets. Pour cela on choisit de façon aléatoire un échantillon de 300 jouets.

   a. Les conditions de détermination de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de jouets commercialisables sont : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

   $n = 300 \geqslant 30$; $p = 0{,}97$ donc $np = 300 \times 0{,}97 = 291 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 300 \times 0{,}03 = 9 \geqslant 5$.

   Les conditions sont donc vérifiées.

   b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de jouets commercialisables est :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}97 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}97\times 0{,}03}}{\sqrt{300}}\,;\, 0{,}97 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}97\times 0{,}03}}{\sqrt{300}}\right] \approx [0{,}95\,;\,0{,}99]$$

c. On constate que 280 jouets de l'échantillon sont commercialisables, ce qui fait une fréquence de $f = \dfrac{280}{300} \approx 0{,}93$.
Or $0{,}93 \notin I$ donc ce résultat remet en cause la modélisation effectuée par l'entreprise.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Une personne décide d'ouvrir un compte épargne le premier janvier 2014 et d'y placer 2 000 euros. Le placement à intérêts composés est au taux annuel de 3 %. Elle verse 150 euros sur ce compte tous les 1er janvier suivants. Pour tout entier naturel n , on note u_n le montant présent sur ce compte au premier janvier de l'année $2014+n$ après le versement de 150 euros. On a $u_0 = 2000$.

Partie A

1. Les intérêts la première année sont de : $2000 \times \dfrac{3}{100} = 60$; on a donc au bout d'un an : $2000 + 60 + 150 = 2210$. Donc $u_1 = 2210$.

   Les intérêts la deuxième année sont de : $2210 \times \dfrac{3}{100} = 66{,}30$; on a donc au bout de deux ans : $2210 + 66{,}30 + 150 = 2426{,}30$. Donc $u_2 = 2426{,}30$.
2. Ajouter 3 % à un nombre, c'est multiplier par $1 + \dfrac{3}{100} = 1{,}03$.

   Pour passer de l'année n à l'année $n+1$, on multiplie le capital par 1,03 puis on ajoute 150 ; donc $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 150$, pour tout entier naturel n.
3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n + 5000$ donc $u_n = v_n - 5000$.
   $v_{n+1} = u_{n+1} + 5000 = 1{,}03u_n + 150 + 5000 = 1{,}03(v_n - 5000) + 5150 = 1{,}03v_n - 5150 + 5150 = 1{,}05v_n$
   $v_0 = u_0 + 5000 = 2000 + 5000 = 7000$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $v_0 = 7000$.
4. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $v_0 = 7000$ donc, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 7000 \times 1{,}03^n$.
   Comme pour tout n, $u_n = v_n - 5000$, on déduit que pour tout n, $u_n = 7000 \times 1{,}03^n - 5000$.
5. Cette personne aura au moins 4 000 euros sur son compte dès que $u_n \geqslant 4000$.
   On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}
u_n \geqslant 4000 &\iff 7000 \times 1{,}03^n - 5000 \geqslant 4000\\
&\iff 7000 \times 1{,}03^n \geqslant 9000\\
&\iff 1{,}03^n \geqslant \frac{9000}{7000}\\
&\iff \ln\left(1{,}03^n\right) \geqslant \ln\frac{9}{7} && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;+\infty[\\
&\iff n \times \ln 1{,}03 \geqslant \ln\frac{9}{7} && \text{propriété de la fonction ln}\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln\frac{9}{7}}{\ln 1{,}03} && \text{car } \ln 1{,}03 > 0
\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln\frac{9}{7}}{\ln 1{,}03} \approx 8{,}5$ donc c'est à partir de $n = 9$ que la personne aura au moins 4 000 euros sur son compte, c'est-à-dire à partir de l'année $2014 + 9 = 2023$.
   Remarque
   On peut également calculer u_3, u_4 … u_8 et u_9, puis signaler que $u_8 = 3867{,}39 < 4000$ et que $u_9 = 4133{,}41 > 4000$.

Partie B

L'algorithme ci-dessous modélise l'évolution d'un autre compte épargne, ouvert le premier janvier 2014, par une seconde personne.

Variables :	C et D sont des nombres réels N est un nombre entier
Entrée :	Saisir une valeur pour C

Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à D la valeur $2 \times \text{C}$
	Tant que $\text{C} < \text{D}$ faire
	    affecter à C la valeur $1,03 \times \text{C} + 600$
	    affecter à N la valeur $\text{N} + 1$
	Fin du Tant que

Sortie :	Afficher N

1. **a.** Dans cet algorithme, la variable C représente la somme que possède la personne l'année $2014 + \text{N}$.

   b. On sait que C reçoit $1,03 \times \text{C} + 600$ donc le capital est multiplié par 1,03 ce qui correspond à une augmentation de 3 %.

   c. On sait que C reçoit $1,03 \times \text{C} + 600$ donc le versement annuel fait par cette personne est de 600 euros.

2. On saisit, pour la variable C, la valeur 3 000.

   a. Pour cette valeur de C, on complète le tableau en suivant pas à pas l'algorithme :

Valeur de C	3 000	3 690	4 400,70	5 132,72	5 886,70	6 663,30
Valeur de N	0	1	2	3	4	5
Valeur de D	6 000	6 000	6 000	6 000	6 000	6 000
Test $\text{C} < \text{D}$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

   b. L'algorithme affiche la valeur de N en sortie de boucle, c'est-à-dire dès que C devient supérieur ou égal à D ; l'algorithme affiche donc 5.

   La variable D est égale au double du capital initial ; cet algorithme donne donc le nombre d'années qu'il faut pour que le capital double, donc 5.

   À partir de $2014 + 5 = 2019$, le capital aura doublé.