൫ Corrigé du baccalauréat S Polynésie juin 2002 ൬

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. La première machine a 9 choix possibles, la deuxième 8 et la troisième 7. Il y a donc $9 \times 8 \times 7 = 504$ possibilités différentes.

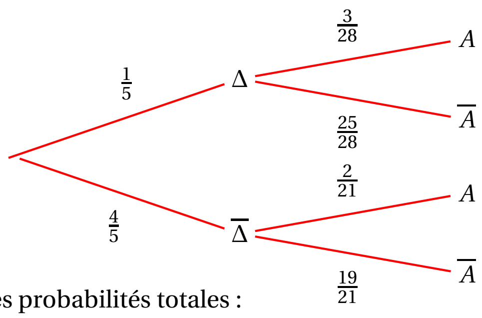
   • Il y a trois lignes, donc 3 alignements possibles, mais chacun d'eux peut être réalisé de 6 façons différentes (abc, acb, bac, bca, cab, cba) ; donc en tout il y a $3 \times 6 = 18$ alignements possibles.
   $p(H) = \dfrac{18}{504} = \dfrac{1}{28}$.
   • Même raisonnement pour les colonnes
   $p(V) = \dfrac{18}{504} = \dfrac{1}{28}$.
   • Il y a deux diagonales, donc 2 alignements possibles, mais chacun d'eux peut être réalisé de 6 façons différentes (abc, acb, bac, bca, cab, cba) ; donc en tout il y a $2 \times 6 = 12$ alignements possibles.
   $p(H) = \dfrac{12}{504} = \dfrac{1}{42}$.
   • La probabilité d'avoir trois jetons alignés est donc égale à :
   $p(H) + p(V) + p(D) = \dfrac{18}{504} + \dfrac{18}{504} + \dfrac{12}{504} = \dfrac{48}{504} = \dfrac{2}{21}$.
   • La probabilité d'avoir trois jetons non alignés est donc $p(N) = 1 - \dfrac{2}{21} = \dfrac{19}{21}$.

2. On a donc $p(X = 20) = \dfrac{18}{504} + \dfrac{18}{504} = \dfrac{36}{504} = \dfrac{1}{14}$;
   $p(X = \alpha) = \dfrac{1}{42}$;
   $p(X = -2) = \dfrac{19}{21}$.
   L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est égale à :
   $E(X) = 20 \times \dfrac{1}{14} + \alpha \times \dfrac{1}{42} - 2 \times \dfrac{19}{21}$.
   Donc $E(X) = 0 \iff \dfrac{10}{7} + \dfrac{\alpha}{42} - \dfrac{38}{21} = 0 \iff \dfrac{\alpha}{42} = \dfrac{38}{21} - \dfrac{10}{7} = \dfrac{38-30}{21} = \dfrac{8}{21}$.
   $\dfrac{\alpha}{42} = \dfrac{8}{21} = \dfrac{16}{42} \Rightarrow \alpha = 16$.

3. **a.** • La machine M_1 a donc 4 possibilités la deuxième en a 8 et la troisième 7, soit $4 \times 8 \times 7 = 224$ issues différentes.
   • Si la machine M_1 place un jeton dans un coin il y a deux possibilités d'avoir trois les trois jetons alignés horizontalement, donc $p_\Delta(H) = \dfrac{8}{224} = \dfrac{1}{28}$;
   • Même chose pour un alignement vertical ; $p_\Delta(V) = \dfrac{1}{28}$;
   • En diagonale il y a encore 8 possibilités, $p_\Delta(D) = \dfrac{1}{28}$.

   b. La probabilité d'avoir un alignement est donc égale à :
   $\dfrac{1}{28} + \dfrac{1}{28} + \dfrac{1}{28} = \dfrac{3}{28}$.

4.



D'après la loi des probabilités totales :

$p(A) = p(A\cap\Delta) + p\left(A\cap\overline{\Delta}\right) = p(\Delta)\times p_{\Delta}(A) + p\left(\overline{\Delta}\right)\times p_{\overline{\Delta}}(A) = \dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{28}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{21} =$

$\dfrac{3}{5\times7\times4}+\dfrac{8}{5\times7\times3} = \dfrac{9+32}{5\times7\times3\times4} = \dfrac{41}{420}$.

5. Il faut trouver :

$p_A(\Delta) = \dfrac{p(A\cap\Delta}{p(A)} = \dfrac{\frac{1}{5}\times\frac{3}{28}}{\frac{41}{420}} = \dfrac{\frac{3}{140}}{\frac{41}{420}} = \dfrac{9}{41}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

1. M d'affixe z est invariant par f si et seulement si :

avec $z\neq2$, $z' = z = \dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2} \iff z\left(\overline{z}-2\right) = \overline{z}+4$, soit avec $z = x+\mathrm{i}y$:

$(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y-2) = x-\mathrm{i}y+4 \iff x^2-\mathrm{i}xy-2x+\mathrm{i}xy+y^2-2y\mathrm{i} = x-\mathrm{i}y+4$.

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on obtient :

$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-2x &=& x+4\\ -2y &=& -y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+xy-3x-4 &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-3x-4 &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right.$

L'équation $x^2-3x-4 = 0$ a deux solutions évidentes -1 et 4.

Les points invariants par f sont les points d'affixes -1 et 4.

2. On a $z'_{C'} = \dfrac{2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+4}{2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)-2} = \dfrac{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+2}{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)-1} = \dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}\sqrt{3}+1 =$

$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Le milieu de [OC] a pour affixe $\dfrac{z_O+z_C}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Le point C′ est le milieu du segment [OC].

3. a. Pour $z/ne2$, on a $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right) = \left(\overline{z}-2\right)\left(\dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}-1\right) = \overline{z}+4-\overline{z}+2 = 6$.

b. — Pour tout point M distinct de A, on a A$M_1 = \left|\overline{z}-2\right|$, B$M' = \left|z'-1\right|$, d'où A$M_1\times$B$M' = \left|\overline{z}-2\right|\times\left|z'-1\right| = \left|\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)\right| = 6$ (d'après le résultat précédent.

— Si $z\neq2$, $z'\neq1$ et $\overline{z}-2\neq0$ donc :

$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{B}M'}\right) = \arg\left(z'-1\right)+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; d'autre part $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M_1}\right) = \arg\left(\overline{z}-2\right)+$ $2k'\pi$ $(k'\in\mathbb{Z})$. Il en résulte que :

$\arg\left[\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)\right] = \arg\left(z'-1\right)+\arg\left(\overline{z}-2\right)+2k\pi+2k'\pi = \arg(6)+2k''\pi$, avec $k''\in\mathbb{Z}$; donc finalement :

$\arg\left[\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)\right] = 0+2k''\pi$ ou encore $\arg\left(z'-1\right) = -\arg\left(\overline{z}-2\right)+$ $2k''\pi$ ou encore :

$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{B}M'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M_1}\right)+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

c. Les points M et M_1 sont symétriques autour de l'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u}\right)$ (leurs affixes sont conjuguées) et A appartient à cet axe de symétrie, donc A $M = AM_1$, d'où A$M\times$B$M' = 6$.

D'autre part $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M}\right) = -\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M_1}\right)$ d'où $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{B}M'}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M}\right)+2k\pi$.

d. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AD}}$ est $2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$; on a donc AD = 2 et BD$'$ = 3.
D'autre part $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{AD}}\right)\dfrac{\pi}{6} = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{BD}'}\right)$. D'où la construction :
Tracer la parallèle à (AD) contenant B (méthode du parallélogramme par exemple) et construire sur cette demi-droite le point D$'$ tel que BD$'$ = 3.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. On a $-2 \times n + 1 \times (2n+1) = 1$, donc d'après le théorème de Bezout n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. a. $2\alpha - \beta = 2(n+3) - (2n+1) = 2n+6-2n-1 = 5$.
Comme δ divise α et β, il divise $2\alpha - \beta$ c'est-dire 5.
Donc $\delta \in \{1\ ;\ 5\}$.

b. α multiple de 5 s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = 5k = n+2$.
β multiple de 5 s'il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $\beta = 5k' = 2n+1$. Le nombre $2\alpha - \beta$ est lui aussi un multiple de 5 :
$2\alpha - \beta = 2(n+3) - (2n+1) = 2n+6-2n-1 = 5$.

3. $1+3-3 = 0$, donc $n^3 + 2n^2 - 3n$ est divisible par$n-1$.
$n^3 + 2n^2 - 3n = n\left(n^2+2n-3\right) = n\left[(n+1)^2 - 1 - 3\right] = n\left[(n+1)^2 - 4\right] = a = n(n+3)(n-1)$.
De même $2-1-1 = 0$, donc $2n^2 - n - 1$ est divisible par $n-1$; $\Delta = 1+8 = 9 = 3^2$; $2n^2 - n - 1 = 2(n-1)\left(n+\frac{1}{2}\right) = b = (n-1)(2n+1)$.

4. a. δ divise $n+3$ et $2n+1$, donc δ divise $n(n+3)$ et $2n+1$, donc δ divise d plus grand commun diviseur de $n(n+3)$ et $2n+1$.
Mais on a vu que n et $2n+1$ sont premiers entre eux, donc :
$d = \text{PGCD}[n(n+3)\ ;\ 2n+1] = \text{PGCD}(n+3\ ;\ 2n+1) = \delta$.

b. D'après la question précédente :
- si $n \equiv 2 \mod 5$, alors $\Delta = 5(n-1)$;
- si nn'est pas congru à 2 modulo 5, alors $\Delta = n-1$.

c. Application :
- Avec $n = 2001$: $2001 \equiv 1 \mod 5$, donc $\Delta = 2001 - 1 = 2000$.
- Avec $n = 2002$: $2001 \equiv 2 \mod 5$, donc $\Delta = 5 \times 2001 = 10005$.

PROBLÈME **15 points**

Partie A

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}$$

1. En écrivant pour $x \neq 0$, $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, on voit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on a donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Géométriquement ce résultat montre que la droite dont une équation est $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

2. $f'(x) = \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2} - (-\mathrm{e}^{-x}) = \dfrac{2}{(x+1)^2} + \mathrm{e}^{-x} > 0$ car somme de deux termes supérieurs à zéro.

f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ de $f(0) = -1-1 = -2$ à 1.

3. Une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0 est :

$M(x ; y) \in (\mathrm{T}) \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

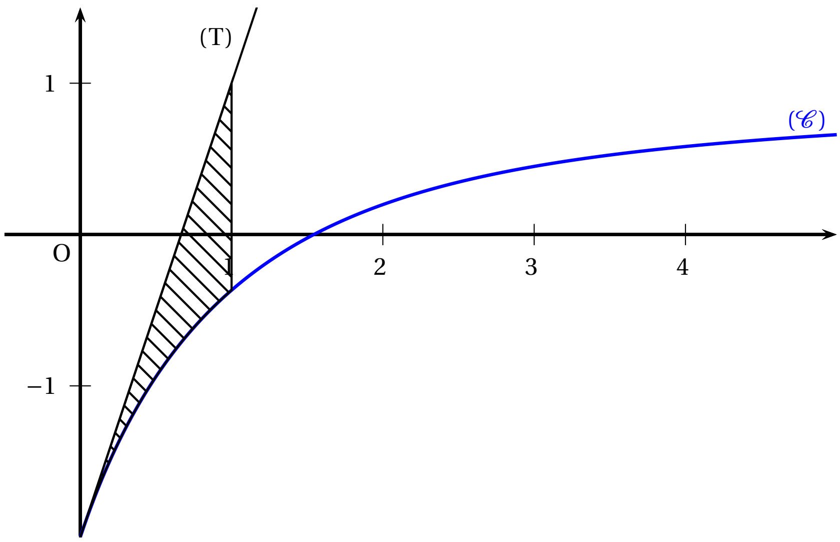
Avec $f(0) = -2$ et $f'(0) = 2+1 = 3$, l'équation devient :

$M(x ; y) \in (\mathrm{T}) \iff y-(-2) = 3(x-0) \iff y = 3x-2$.

4. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, f est continue car dérivable et strictement croissante d'une valeur inférieure à zéro à une valeur supérieure à zéro : il existe donc un réel unique u tel que $f(u) = 0$.

La calculatrice donne $f(1,5) \approx -0,02$ et $f(1,6) \approx 0,03$, donc $1,5 < u < 1,6$.

5.



6. **a.** On a pour $x \neq -1$, $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x+1-1-1}{x+1} = \dfrac{x+1-2}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} - \dfrac{2}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$.

b. (T) étant au dessus de $\mathscr{C}$, l'aire, en unité d'aire de la surface est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^1 \left[3x-2-\left(1-\frac{2}{x+1}-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x-3+\frac{2}{x+1}+\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x =$

$\left[3\frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln(x+1) - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \dfrac{3}{2} - 3 + 2\ln 2 - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^0 = 2\ln 2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ u. a.

Or une unité d'aire vaut $3 \times 3 = 9$ cm^2.

Donc l'aire est égale à $9\left(2\ln 2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \approx 4,7$ cm^2.

Partie B

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \text{e}^{-x}.$$

1. Sur $[0\ ;\ +\infty[$, f_n est dérivable et sur cet intervalle :
$f_n'(x) = \dfrac{x+nx+n}{(x+n)^2} + \text{e}^x = \dfrac{2n}{(x+n)^2} + \text{e}^x > 0$ car somme de deux termes positifs non nuls.
La fonction f_n est donc strictement croissante de $f_n(0) = \dfrac{-n}{n} - \text{e}^{-0} = -1-1 = -2$ à sa limite en plus l'infini.
Or quel que soit n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-n}{x+n} = 1$, car $\dfrac{x-n}{x+n} = \dfrac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}}$ pour $x \neq= 0$.
D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^x = 0$, donc $= \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.
Conclusion : quel que soit n, f_n croît de -2 à 1.

2. a. $f_n(n) = \dfrac{n-n}{n+n}\text{e}^{-n} = -\text{e}^{-n} < 0$, car quel que soit n, $\text{e}^{-n} > 0$.

b. • *Initialisation :* pour $n = 0$, on a $\text{e}^{0+1} > 2\times 0+1$ ou encore $\text{e} > 1$. L'inégalité est vraie au rang 0.
• *Hérédité :* supposons que pour $n \in N$ on ait :
$\text{e}^{n+1} > 2n+1$ d'ou en multipliant chaque membre par e : $\text{e}^{n+2} > \text{e}(2n+1)$.
Or $(2n+1)\text{e} > 2n+3 \iff 2n(\text{e}-1) > 3\text{e} \iff n > \dfrac{3-\text{e}}{2(\text{e}-1)}$ (1)
car $(\text{e}-1>0)$.
Or $\dfrac{3-\text{e}}{2(\text{e}-1)} \approx 0,08$.
L'inégalité (1) est donc vraie pour $n \geqslant 1$, donc $(2n+1)\text{e} > 2n+3$ aussi.
L'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$. On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel n, $\text{e}^{n+1} > 2n+1$.
$f_n(n+1) = \dfrac{n+1-n}{n+1+n} - \text{e}^{-(n+1)} = \dfrac{1}{2n+1} - \text{e}^{-(n+1)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{\text{e}^{(n+1)}} = \dfrac{\text{e}^{(n+1)} - (2n+1)}{\text{e}^{(n+1)}(2n+1)}$.
Or d'après la question précédente le numérateur est supérieur à zéro et par ailleurs le dénominateur produit de deux facteurs supérieurs à zéro est supérieur à zéro, donc $f_n(n+1) > 0$.

c. Sur l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$, f_n est continue car dérivable et
$f_n(n)\times f_n(n+1) < 0$, donc pour tout naturel n non nul l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $u_n \in [n\ ;\ n+1]$.

3. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}$ et que $n < u_n$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Pour $n \neq= 0$, on a $n < u_n < n+1 \Rightarrow 1 < \dfrac{u_n}{n} < 1 + \dfrac{1}{n}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'après le théorème des « gendarmes », $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. a. $\dfrac{x-n}{x+n} = \dfrac{x+n-n-n}{x+n} = \dfrac{x+n-2n}{x+n} = \dfrac{x+n}{x+n} - \dfrac{2n}{x+n} = 1 - \dfrac{2n}{x+n}$.
La valeur moyenne de f_n sur $[0\ ;\ u_n]$ est égale à :
$M_n = \dfrac{1}{u_n - 0}\displaystyle\lim_0^{u_n} f_n(x)\,\text{d}x = \frac{1}{u_n}\lim_0^{u_n}\left[1 - \frac{2n}{x+n} - \text{e}^{-x}\right]\text{d}x =$
$\dfrac{1}{u_n}\left[x - 2n\ln(x+n) + \text{e}^{-x}\right]_0^{u_n} = \dfrac{1}{u_n}\left[u_n - 2n\ln(u_n+n) + \text{e}^{-u_n} - 0 + 2n\ln n - \text{e}^0\right] =$
$\dfrac{1}{u_n}\left[u_n + \text{e}^{-u_n} - 1 + 2n\ln\dfrac{n}{u_n+n}\right] = 1 + \dfrac{\text{e}^{-u_n}}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{2n}{u_n}\ln\dfrac{n}{u_n+n}$.

b. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-u_n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} = 0$.

D'autre part $\dfrac{2n}{u_n} \ln \dfrac{n}{u_n+n} = -\dfrac{2}{\frac{u_n}{n}} \ln \dfrac{u_n+n}{n} = -\dfrac{2}{\frac{u_n}{n}} \ln\left(\frac{u_n}{n}+1\right)$.

Or on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{u_n}{n}+1\right) = \ln 2$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 1 - 2\ln 2 = 1 - \ln 4 \approx 0,386$.