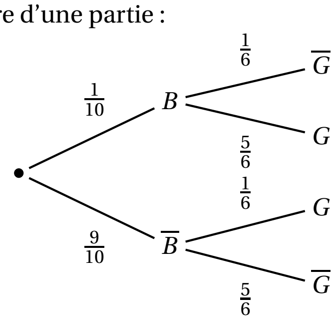
∽ Corrigé du baccalauréat S Polynésie ∾ juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On peut dresser l'arbre d'une partie :



En suivant les branches qui conduisent à un gain on obtient :
$p(G) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{5}{6} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5+9}{60} = \dfrac{14}{60} = \dfrac{7}{30}$.

2. On a $p\left(\overline{G}\right) = 1 - p(G) = \dfrac{23}{30}$.

Il faut trouver $p_{\overline{G}}(B) = \dfrac{p\left(\overline{G} \cap B\right)}{p\left(\overline{G}\right)} = \dfrac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{30}} = \dfrac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{30}} = \dfrac{1}{60} \times \dfrac{30}{23} = \dfrac{1}{46}$.

3. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 4$ et $p(G) = \dfrac{7}{30}$.

La probabilité de gagner exactement deux fois sur quatre parties est :

$$\binom{4}{2}\left(\frac{7}{30}\right)^2 \times \left(1 - \frac{7}{30}\right)^2 = \frac{6 \times 7^2 \times 23^2}{30^4} = \frac{25\,921}{135\,000} \approx 0{,}192(0).$$

4. La probabilité de ne gagner aucune partie sur n jouées est $\binom{n}{0}\left(\dfrac{23}{30}\right)^n$.

La probabilité d'en gagner au moins une est donc : $1 - \binom{n}{0}\left(\dfrac{23}{30}\right)^n$.

Il faut donc trouver n tel que $1 - \binom{n}{0}\left(\dfrac{23}{30}\right)^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}01 \geqslant \left(\dfrac{23}{30}\right)^n \iff -\ln 100 \geqslant n \ln\left(\dfrac{23}{30}\right) \iff n \geqslant \dfrac{\ln 100}{\ln\left(\dfrac{23}{30}\right)} \approx 17{,}3$.

Il faut donc jouer au minimum 18 fois.

Partie B

1. a. Loi de probabilité de X :

X	$+4$	-1
$p(X = x_i)$	$\dfrac{7}{30}$	$\dfrac{23}{30}$

L'espérance mathématique est $\text{E}(X) = 4 \times \dfrac{7}{30} + (-1) \times \dfrac{23}{30} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$.

b. L'espérance de gain étant positive (environ 16 centimes par partie) le jeu est défavorable à l'organisateur.

2. On reprend l'arbre initial avec $p(\text{B}) = \dfrac{1}{n+1}$ et $p\left(\overline{\text{B}}\right) = \dfrac{n}{n+1}$.

La probabilité de gagner devient $p(\text{G}) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{5}{6} + \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{n+5}{6(n+1)}$. Il suit que $p\left(\overline{\text{G}}\right) = \dfrac{5n+1}{6(n+1)}$.

L'espérance est donc $\text{E}(X) = 4 \times \dfrac{n+5}{6(n+1)} + (-1) \times \dfrac{5n+1}{6(n+1)} = \dfrac{19-n}{6(n+1)}$.

Le jeu est défavorable à l'organisateur si $\text{E}(X) < 0 \iff \dfrac{19-n}{6(n+1)} \geqslant 0 \iff n \leqslant 19$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. En posant $z = x+\text{i}y$, avec x et y réels, $\overline{z}-3\text{i}z-3+6\text{i} = 0 \iff x-\text{i}y-3\text{i}x+3y-3+6\text{i} = 0 \iff \begin{cases} x+3y-3 &= 0 \\ -3x-y+6 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y-3 &= 0 \\ -9x-3y+18 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y-3 &= 0 \\ -8x-3y+15 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y-3 &= 0 \\ -8x+15 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{15}{8} \\ y &= \frac{3}{8} \end{cases}$

Donc cette équation a une solution : $\dfrac{15}{8} + \text{i}\dfrac{3}{8}$.

2. OAB est équilatéral direct, donc B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. L'écriture complexe de cette rotation est : $z' = z\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

Donc $z_\text{B} = z_\text{A}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = (4-2\text{i})\left(\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2+\sqrt{3}+\text{i}\left(2\sqrt{3}-1\right)$.

3. a. L'égalité $\arg(z-2\text{i}) = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ signifie que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{D}M}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$: c'est donc la droite privée du point D contenant D et ayant une pente de 1.

b. $z = 2\text{i} + 2\text{e}^{\text{i}\theta} \iff z-2 = 2\text{e}^{\text{i}\theta}$ qui signifie :

— que $|z-2\text{i}| = 2 \iff \text{D}M = 2$;

— que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{D}M}\right) = \theta + 2k\pi$

L'ensemble de ces points M est donc le cercle de centre D et de rayon 2.

4. Si pour $z \neq -2$, $z' = \dfrac{z-1}{\overline{z}+2}$, $|z'| = 1 \iff \left|\dfrac{z-1}{\overline{z}+2}\right| = 1 \iff |z-1| = \left|\overline{z}+2\right|$.

Or z et $\overline{z}$ sont les affixes de points symétriques autour de $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u}\right)$ et le point B d'affixe -2 appartient à cet axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u}\right)$. Donc $\left|\overline{z}+2\right| = |z+2|$

L'équation devient $|z+2| = |z-1|$, qui signifie si on appelle C le point d'affixe 1, BM = CM ou encore M appartient à la médiatrice de [BC].

EXERCICE 3 **5 points**

Enseignement obligatoire

1. a. Par définition E existe $(2+1 \neq 0)$ et vérifie $2\overrightarrow{\text{EA}} + \overrightarrow{\text{EB}} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{\text{OE}} = 2\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}}$.

Les coordonnées de E sont donc $\left(\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}{3}\ ;\ \dfrac{-6+0}{3}\ ;\ \dfrac{4-4}{3}\right) = (0\ ;\ -2\ ;\ 0)$.

b. En utilisant le point E : $\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{M\text{O}}\right\| \iff \left\|2\overrightarrow{M\text{E}} + \overrightarrow{M\text{E}}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{M\text{O}}\right\| \iff M\text{E} = M\text{O}$ qui signifie que M est équidistant de O et de E, donc appartient au plan médiateur de [OE].

c. $ME = MO \iff ME^2 = MO^2 \iff x^2+y^2+z^2 = x^2+(y+2)^2+z^2 \iff 0 = 4y+4 \iff y = -1$.
L'équation du plan médiateur est $y = -1$.

2. **a.** On a $AB^2 = \left(-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^2 + 3^2 + (-4-2)^2 = 4+9+36 = 49$; donc $AB = 7$.

Le rayon de la sphère est donc $\frac{7}{2}$.

Distance de I centre de la sphère au plan (P) : $I\left(-\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{3}{2}\ ;\ -1\right)$.

On a $d(I\ ;\ (P)) = \dfrac{\left|-\frac{3}{2}+1\right|}{\sqrt{1}^2} = \frac{1}{2}$.

Comme $\frac{1}{2} < \frac{7}{2}$ on en déduit que l'intersection (le cercle (C)) de la sphère et du plan (P) n'est pas vide.

b. Les points de (C) vérifient l'équation de (S) et celle de (P), c'est-à-dire le système $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -1\\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2 & = & \frac{49}{4}\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -1\\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2 & = & \frac{49}{4}\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -1\\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2 & = & 12\end{array}\right.$. Une équation de (C) dans le plan (P) est

$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2 = 12$ qui est l'équation d'un cercle de centre $\left(-\frac{1}{3}\ ;\ -1\ ;\ -1\right)$ et de rayon $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

3. Droite (ID) : on traduit la relation vectorielle :
$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (ID) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{ID} \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-\left(-\frac{1}{3}\right) & = & t\times 0\\ y-\left(-\frac{3}{2}\right) & = & t\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\\ z-(-1) & = & t\left(4\sqrt{3}\right)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0t-\frac{1}{3}\\ y & = & t-\frac{3}{2}\\ z & = & 4t\sqrt{3}-1\end{array}\right.$$

4. Si la droite (ID) est sécante au cercle (C) il existe au moins un point dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient l'équation de (ID) et celle de (C). Il faut donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0t-\frac{1}{3}\\ y & = & t-\frac{3}{2}\\ z & = & 4t\sqrt{3}-1\\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2 & = & 12\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0t-\frac{1}{3}\\ y & = & t-\frac{3}{2}\\ z & = & 4t\sqrt{3}-1\\ (0)^2+(4\sqrt{3}t)^2 & = & 12\end{array}\right.$$

Ceci entraîne que $t^2 = \frac{1}{4} \iff t = -\frac{1}{2}$ ou $t = \frac{1}{2}$, mais $y = t-\frac{3}{2} = -1 \iff t = \frac{1}{2}$.

Seule valeur positive de t convient. (ID) est donc sécante au cercle (C) au seul point $F\left(-\frac{1}{3}\ ;\ -1\ ;\ 2\sqrt{3}-1\right)$.

EXERCICE 3 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie A

1. Une équation du cône est de la forme : $x^2+y^2=\alpha z^2$. Comme A appartient à (Γ), alors $1^2+3^2=\alpha\times 2^2 \iff \alpha=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$.

   Une équation de (Γ) est donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Gamma) \iff x^2+y^2=\dfrac{5}{2}z^2$.

2. **a.** Le plan parallèle à $x\mathrm{O}y$ et contenant B a pour équation $z=-4$.

   b. L'intersection de (P) et de (Γ) est un cercle dont les points ont des coordonnées qui vérifient les deux équations :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& \dfrac{5}{2}z^2\\ z&=&-4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 40\\ z&=&-4\end{array}\right.$$

   Ce cercle (C_1) a donc pour centre le point de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,-4)$ et de rayon $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

3. De la même façon $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}z^2$ et $y=3$ entraîne que $\dfrac{5}{2}z^2-x^2=9$ et $y=3$.
   Cette intersection (C_2) est une hyperbole.

Partie B

1. $x^2+y^2=40$.

   a. Les nombres x et y ne peuvent, en valeur absolue être supérieurs à 6. On trouve que les seuls carrés dont la somme est égale à 40 sont 36 et 4.

   Les couples solution sont donc $(-6\,;\,-2)$, $(-6\,;\,2)$, $(-2\,;\,-6)$, $(-2\,;\,6)$, $(2\,;\,-6)$, $(2\,;\,6)$, $(6\,;\,-2)$, $(6\,;\,2)$.

   b. En ajoutant la cote $z=-4$, on obtient huit points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers :

   $(-6\,;\,-2\,;\,-4)$, $(-6\,;\,2\,;\,-4)$, $(-2\,;\,-6\,;\,-4)$, $(-2\,;\,6\,;\,-4)$, $(2\,;\,-6\,;\,-4)$, $(2\,;\,6\,;\,-4)$, $(6\,;\,-2\,;\,-4)$, $(6\,;\,2\,;\,-4)$

2. **a.** $(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathbb{Z}^3$ et $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}z^2 \iff 2(x^2+y^2)=5z^2$.

   D'après Gauss : 2 divise $2(x^2+y^2)$, donc $5z^2$; comme il est premier avec 5, il divise z^2 et donc z puisque ces deux entiers comprennent exactement les mêmes diviseurs premiers.

   De la même façon 5 divise $2(x^2+y^2)$ et est premier avec 2, donc il divise x^2+y^2.

   On a vu que z est pair, donc z^2 est un multiple de 4 et par conséquent $\dfrac{5}{2}z^2=x^2+y^2$ est un multiple de 2.

   Finalement x^2+y^2 est un multiple de 2 et de 5, donc de 10.

   b. $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(C_2)$ donc $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}z^2$ et $y=3$.

   D'après la question précédente on a $x^2+y^2=x^2+9$ est divisible par 10, soit $x^2+9\equiv 0\quad[10] \iff x^2\equiv -9\quad[10] \iff x^2\equiv 1\quad[10] \iff x\equiv 1\quad[10]$.

   c. Résolution de $x^2\equiv 1\quad[10]$: les seules possibilités sont $x\equiv 1\quad[10]$ et $x\equiv 9\quad[10]$.

   d. Avec $x=1$, $y=3$, on trouve que $z=2$ ou $z=-2$. La première solution correspond à A la seconde à un autre point de (C_{02}) : $(1\,;\,3\,;\,-2)$.

   (Il y a aussi $(9\,;\,3\,;\,6)$ et $(9\,;\,3\,;\,-6)$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** $1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant \ln x \leqslant \ln 2 \Rightarrow 0 \leqslant x\ln x \leqslant 2\ln 2 \Rightarrow 1 \leqslant 1 + x\ln x \leqslant 1 + 2\ln 2$.
La fonction f est positive sur $[1\,;\,2]$.

   b. On a M$(1\,;\,1)$ et N$(2\,;\,1+2\ln 2)$, donc $\overrightarrow{\text{MN}}(1\,;\,2\ln 2)$, ce qui montre que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

   c. Une équation de la tangente T_x à $\mathscr{C}_f$ en un point de coordonnées $(x\,;\,f(x))$, avec $1 \leqslant x \leqslant 2$ est : $P(X\,;\,Y) \in T_x \iff Y - (1 + x\ln x) = (X - x)f'(x)$.
Or $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$.
$P(X\,;\,Y) \in T_x \iff Y - (1 + x\ln x) = (X - x)(1 + \ln x) \iff Y = 1 + x\ln x + X(1 + \ln x) - x - \ln x \iff Y = X(1 + \ln x) + 1 + x\ln x - x - \ln x$. Cette droite est parallèle à la droite (MN) si et seulement si son coefficient directeur est égal à $2\ln 2$, soit si $1 + \ln x = 2\ln 2 \iff \ln x = \ln 4 - \ln \text{e} \iff \ln x = \ln\left(\dfrac{4}{\text{e}}\right) \iff x = \dfrac{4}{\text{e}}$ (d'après la croissance de la fonction ln.
Il existe donc un seul point E entre M et N où la tangente à la courbe est parallèle à la droite (MN).

   d. D'après la question précédente l'équation de T est $P(X\,;\,Y) \in \text{T} \iff Y = X(1 + \ln x) + 1 - x$ avec $x = \dfrac{4}{\text{e}}$, l'équation de la tangente en E est donc (puisque le coefficient directeur est égal à $2\ln 2$), $Y = (2\ln 2)X + 1 - \dfrac{4}{\text{e}}$

2. **a.** On a $g(x) = 1 + x\ln x - (2\ln 2)x - 1 + \dfrac{4}{\text{e}}$, donc puisque toutes les fonctions sont dérivables sur $[1\,;\,2]$, $g'(x) = \ln x + 1 - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

   b. La fonction g' s'annule si $1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) = 0 \iff \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) = -1 \iff$
$\ln\left(\dfrac{x}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right) \iff x = \dfrac{4}{\text{e}}$.
La dérivée g' est donc négative sur $\left[1\,;\,\dfrac{1}{\text{e}}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{\text{e}}\,;\,2\right]$, d'où le tableau de variations de g :
La fonction est donc décroissante de $f(1)$ à $f\left(\dfrac{4}{\text{e}}\right) = 0$ puis croissante de 0 à $f(2)$. La fonction g a donc un minimum en $\dfrac{4}{\text{e}}$: elle est donc positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
Conclusion : $g(x) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant (2\ln 2)x - \dfrac{4}{\text{e}} + 1$, ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente T.

3. **a.** On a M$'\left(1\,;\,2\ln 2 - \dfrac{4}{\text{e}} + 1\right)$ et N$'\left(1\,;\,4\ln 2 - \dfrac{4}{\text{e}} + 1\right)$.
aire(MNQP) $= \dfrac{1}{2}(f(1) + f(2)) \times \text{PQ} = \dfrac{1 + 1 + 2\ln 2}{2} \times 1 = 1 + \ln 2$.
aire(M$'$N$'$QP) $= \dfrac{2\ln 2 - \frac{4}{\text{e}} + 1 + 4\ln 2 - \frac{4}{\text{e}} + 1}{2} \times \text{PQ} = 3\ln 2 - \dfrac{4}{\text{e}} + 1$.

   b. Avec l'hypothèse que la courbe reste sous la droite (MN) on en déduit l'encadrement :

$$1 + \ln 2 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 3\ln 2 - \frac{4}{\text{e}} + 1$$

$$\text{soit} \quad 1,607 < \mathscr{A} < 1,694$$

$$\text{Conclusion } \; 1,6 < \mathscr{A} < 1,7 \quad \text{à } 10^{-1} \text{ près}$$

Partie B

1. Intégration par parties : $u'(x) = x$; $v(x) = \ln x$
Donc $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$; $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Les dérivées u' et v' étant continues sur [1 ; 2],

$$\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{4\ln 2}{2} - 1 - 0 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

2. $\mathscr{A}$ est, par définition la mesure de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
D'où $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 (1 + x\ln x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 1\cdot\mathrm{d}x + \int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x = 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 2\ln 2 + \frac{1}{4}$.

$$\text{Conclusion : } \quad \mathscr{A} = 2\ln 2 + \frac{1}{4}.$$