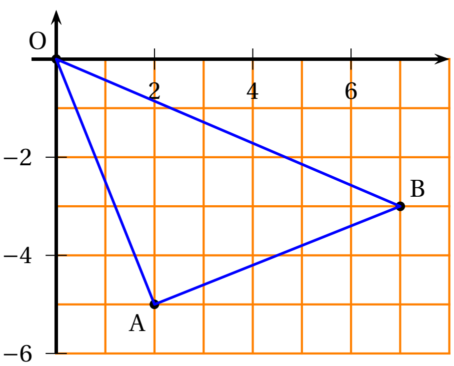
Corrigé du baccalauréat S Polynésie 10 juin 2011

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats.

1.



Méthode 1 :
Le dessin suggère de considérer la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Son écriture complexe est : $z' - z_{\text{A}} = \text{i}\,(z - z_{\text{A}}) \iff z' - 2 + 5\text{i} = \text{i}\,(z - 2 + 5\text{i})$.
L'image B′ du point B dans cette rotation a donc pour affixe :
$z_{\text{B}'} - 2 + 5\text{i} = \text{i}\,(7 - 3\text{i} - 2 + 5\text{i}) \iff$
$z_{\text{B}'} = 2 - 5\text{i} + 5\text{i} - 2 = 0$.
L'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point O. Ceci démontre que le triangle ABO est isocèle et rectangle en A.

Méthode 2 : $\text{OA}^2 = |z_{\text{A}}|^2 = 2^2 + 5^2 = 29$;
$\text{AB}^2 = |z_{\text{B}} - z_{\text{A}}|^2 = |7 - 3\text{i} - 2 + 5\text{i}|^2 = |5 + 2\text{i}|^2 = 25 + 4 = 29$;
$\text{OB}^2 = |z_{\text{B}}|^2 = |7 - 3\text{i}|^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$.
D'une part $\text{AO}^2 = \text{AB}^2 \iff \text{AO} = \text{AB} \iff$ ABO est isocèle en A ;
D'autre part $29 + 29 = 58 \iff \text{AO}^2 + \text{Ab}^2 = \text{OB}^2 \iff$ ABO est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Méthode 3 :
Soit $Z = \dfrac{z_{\text{O}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}} = \dfrac{-2 + 5\text{i}}{5 + 2\text{i}} = \dfrac{\text{i}(2\text{i} + 5)}{2\text{i} + 5} = \text{i}$.
On a $Z = \dfrac{\text{AO}}{\text{AB}} = 1$, soit AO = AB ;
De plus $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AO}}\right) = \frac{\pi}{2}$ ce qui montre que l'angle $\widehat{\text{BAO}}$ est droit. Le triangle ABO est donc rectangle isocèle en A.

Méthode 4 :
$\dfrac{z_{\text{O}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}} = \dfrac{z_{\text{O}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}} = \text{i}$ signifie que O est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. Soient A et B les points d'affixes respectives i et -2i.
On a $|z - \text{i}| = |z + 2\text{i}| \iff AM = BM \iff M \in \Delta$ médiatrice de [AB]. mais comme A et B appartiennent à l'axe des ordonnées, la médiatrice de [AB] (d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses. La proposition est vraie.

3. $z = 3 + \text{i}\sqrt{3}$, donc $|z|^2 = 9 + 3 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow |z| = 2\sqrt{3}$. On peut en factorisant ce module écrire :
$$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}.$$
Donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $z^{3n} = \left(2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{3n} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n}\text{e}^{\text{i}\frac{3n\pi}{6}} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n}\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{2}}$. Or $\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{2}}$ est égal à i, -1, $-\text{i}$ ou 1 suivant les valeurs de n et la puissance n'est donc un nombre imaginaire que pour n impair. La proposition est fausse.

4. Soit z un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire $z = \rho\text{i}$ avec ρ réel positif non nul.

Donc $|\mathrm{i}+z| = 1+|z| \iff |\mathrm{i}+\rho\mathrm{i}| = 1+|\rho\mathrm{i}| \iff |\mathrm{i}(1+\rho)| = 1+|\rho\mathrm{i}| \iff 1+\rho = 1+\rho$ qui est bien vraie.

La proposition 4 est vraie.

5. Soit z un nombre complexe non nul.

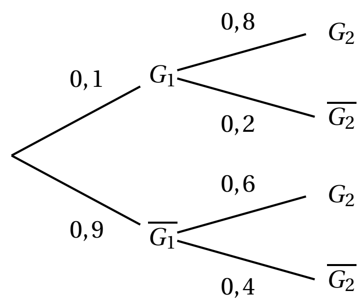
Si le module de z est égal à 1 alors z s'écrit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Donc $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} = \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta + \cos 2\theta - \mathrm{i}\sin 2\theta = 2\cos 2\theta$ qui est un réel.

Exercice 2 — 5 points

Enseignement obligatoire

1. On a l'arbre pondéré suivant :



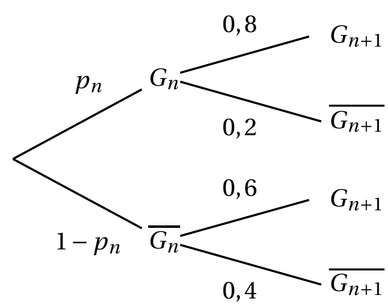
On a $p_2 = p\left(G_1 \cap G_2\right) + p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) = p\left(G_1\right) \times p_{G_1}\left(G_2\right) + p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{(G_1)}}\left(G_2\right) =$
$0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$.

2. Il faut trouver $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \dfrac{p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)}{p\left(G_2\right)} = \dfrac{0,54}{0,62} = \dfrac{27}{31}$.

3. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à $1 - 0,144 = 0,856$.

4. À la partie n, on a l'arbre suivant :



On a donc $p_{n+1} = p\left(\mathrm{G}_n \cap \mathrm{G}_{n+1}\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_n} \cap \mathrm{G}_{n+1}\right)$

$= p\left(\mathrm{G}_n\right) \times p_{\mathrm{G}_n}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_n}\right) \times p_{\overline{\mathrm{G}_n}}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right) =$

$p_n \times 0,8 + \left(1 - p_n\right) \times 0,6 = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6 = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

5. *Initialisation :* On a bien $\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{20}=\dfrac{15-13}{20}=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}=0,1=p_1$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, $n>1$ tel que $p_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

D'après la formule démontrée à la question 4 :

$p_{n+1}=\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right]+\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}=\dfrac{3}{20}+\dfrac{12}{20}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}=$ $\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 1, et si elle vraie à un rang au moins égal à 1 ; elle est vraie au rang suivant.

On a donc démontré par le principe de récurrence que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $p_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

6. Comme $-1<\dfrac{1}{5}<1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}p_n=\dfrac{3}{4}=0,75$.

7. On a : $\dfrac{3}{4}-p_n<10^{-7}\iff\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)<10^{-7}\iff\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n<10^{-7}\iff$ $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n<\dfrac{4}{13}\times10^{-7}\iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $n\ln\left(\frac{1}{5}\right)<\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)$ $\iff n>\dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$.

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}\approx10,7$. Donc u_{11} approche la limite $\dfrac{3}{4}$ à moins de 10^{-7}.

Exercice 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

1. $u_1=10u_0+21$ or $u_0=1$ donc $u_1=10\times1+21=31$;
$u_2=10u_1+21=10\times31+21=331$;
$u_3=10u_2+21=10\times31+21=3\,331$.

2. a.

- *Initialisation* : $10^{0+1}-7=10-7=3=3\times1=3u_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- *Hérédité* : Supposons que pour tout entier naturel n, $3u_n=10^{n+1}-7$ alors
  $3u_{n+1}=3(10u_n+21)=10\times(3u_n)+63=10(10^{n+1}-7)+63$
  $3u_{n+1}=10^{(n+1)+1}-70+63=10^{(n+1)+1}-7$.
  La propriété est donc bien héréditaire.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc par le principe de la récurrence elle est donc vraie pour tout naturel n : $3u_n=10^{n+1}-7$.

b. Pour tout naturel n, $10^{n+1}-7=1\underbrace{0\ldots0}_{n+1}-7=\underbrace{9\ldots9}_{n}3$, donc par division par 3,

$u_n=\dfrac{10^{n+1}-7}{3}=\underbrace{3\ldots3}_{n}1$.

3. $u_2=331$ avec $\sqrt{331}\approx18,2$ or 331 n'est divisible ni par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 : les nombres premiers inférieurs ou égaux à 18. u_2 est donc premier.

4. D'après 2. a., pour tout naturel n, $u_n=33...31$ avec n chiffres 3

- Le chiffre des unités de u_n est 1, impair, donc 2 ne divise pas u_n.

- La somme de ses chiffres est $3+3+\ldots+3+1 \equiv 1$ (modulo 3) donc 3 ne divise pas u_n.
- Le chiffre des unités de u_n est 1, différent de 0 et 5, donc 5 ne divise pas u_n.

a. $10 = -1+11$ et $-7 = 4-11$ donc $10 \equiv -1$ et $-7 \equiv 4$ (modulo 11),
donc $3u_n = 10^{n+1} - 7 \equiv (-1)^{n+1} + 4 \equiv (-1)^1(-1)^n + 4 \equiv 4-(-1)^n$ (modulo 11)

b. Si u_n était divisible par 11 alors $3u_n$ le serait a fortiori, or pour n pair $3u_n \equiv 4-1 \equiv 3$ (modulo 11) et pour n impair $3u_n \equiv 4-(-1) \equiv 5$ (modulo 11) donc 11 ne divise pas u_n.

5. a. 17 est un nombre premier qui ne divise pas 16 donc d'après le petit théorème de Fermat, $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17).

b. Pour tout naturel k, $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7 = \left(10^{16}\right)^k \times 10^9 - 7 \equiv 1^k \times 10^9 - 7$ (modulo 17). Or $6 \times 17 = 102$ donc $10^2 \equiv -2$ (modulo 17) donc $10^9 = 10 \times \left(10^2\right)^4 \equiv 10(-2)^4 \equiv 10 \times 16 \equiv$ $10 \times (-1) \equiv -10$ et donc $3u_{16k+8} \equiv -10-7 \equiv -17 \equiv 0$ (modulo 17)
donc 17 divise $3u_{16k+8}$. Or 17 est premier avec 3 et d'après le théorème de Gauss,
17 divise u_{16k+8}.

Exercice 3 — 5 points

Enseignement obligatoire

Partie A : Restitution organisée de connaissances On supposera connus les résultats suivants :
Démonstration classique basée sur l'intégrale de la fonction continue $(uv)' = u'v + uv'$.

Partie B

1. a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ entraînent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. f produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x+1)$.
Or $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2\ln x+1$ et :
$2\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -\dfrac{1}{2} \iff$ (par croissance de la fonction exponentielle) $x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
Donc f est croissante sur $\left]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.
De même $2\ln x + 1 < 0 \iff \ln x < -\dfrac{1}{2} \iff$ (par croissance de la fonction exponentielle) $x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
Donc f est décroissante sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right[$.
Rem. On peut écrire $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

2. Une équation de la tangente $(\mathcal{T}_{x_0})$ à $(\mathcal{C})$ en un point de coordonnées $\left(x_0\,;\,x_0^2\ln x_0\right)$ est :
$M(X\,;\,Y) \in (\mathcal{T}_{x_0}) \iff Y - \left(x_0^2\ln x_0\right) = f'(x_0)(X-x_0)$.
En particulier $\mathrm{O}(0\,;\,0) \in (\mathcal{T}_{x_0}) \iff 0 - \left(x_0^2\ln x_0\right) = x_0(2\ln x_0+1)(0-x_0) \iff$
$-x_0^2\ln x_0 = -2x_0^2\ln x_0 - x_0^2 \iff x_0^2 + x_0^2\ln x_0 = 0 \iff x_0^2(1+\ln x_0) = 0 \iff 1+\ln x_0 = 0$, car la solution $x_0 = 0$ n'est pas possible.
Finalement : $1+\ln x_0 = 0 \iff \ln x_0 = -1 \iff x_0 = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Il existe donc une tangente unique $(\mathcal{T}_{\mathrm{e}^{-1}})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par O. Une de ses équations est :

$$M(x\,;\,y) \in (\mathcal{T}_{\mathrm{e}^{-1}}) \iff Y = -\frac{1}{\mathrm{e}}X.$$

3. **a.** Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$. Cette fonction produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{5x^4}{25}(5\ln x - 1) + \dfrac{x^5}{25} \times \dfrac{5}{x} = x^4 \ln x - \dfrac{x^4}{5} + \dfrac{x^4}{5} = x^4 \ln x$.
Conclusion la fonction g est une primitive de la fonction $x \longmapsto x^4 \ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. On a $V = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \pi[x^2 \ln x]^2\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \pi x^4 \ln x \times \ln x\,\mathrm{d}x$.

Soient $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & x^4 \ln x\\ v(x) & = & \ln x \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1)\\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$

4. On a donc en intégrant par parties puisque toutes les fonctions $u(x), u'(x), v(x)$ et $v'(x)$ sont continues sur $]0\,;\,+\infty[$:
$V = \pi\left[\dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1) \times \ln x\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} - \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1) \times \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \pi\dfrac{1}{25}\left[x^5(5\ln x - 1) \times \ln x\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} - \pi\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} 5x^4 \ln x\,\mathrm{d}x +$
$\pi\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} 5x^4\,\mathrm{d}x = \pi\dfrac{1}{25}\left[0 - \left(\dfrac{6}{\mathrm{e}^5}\right)\right] - \pi\dfrac{1}{25}\left[\dfrac{5x^5}{25}(5\ln x - 1) - \dfrac{1}{5}x^5\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} =$
$-\dfrac{6\pi}{25\mathrm{e}^5} - \dfrac{\pi}{25}\left[\dfrac{1}{5}(5\ln 1 - 1) - \dfrac{1}{5}\right] - \left[\dfrac{1}{5\mathrm{e}^5}\left(5\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) - \dfrac{1}{5\mathrm{e}^5}\right] = -\dfrac{6\pi}{25\mathrm{e}^5} - \dfrac{\pi}{25}\left[-\dfrac{2}{5} - \left(-\dfrac{7}{5}\mathrm{e}^5\right)\right] =$
$\dfrac{2\pi}{125} - \dfrac{37\pi}{125\mathrm{e}^5} = \dfrac{\pi}{125}\left(2 - \dfrac{37}{\mathrm{e}^5}\right)$.

Exercice 4 — 5 points

Enseignement obligatoire

Partie A

1. Comme $1 + 2 \neq 0$, K existe et est défini par $1\overrightarrow{\mathrm{KD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{KF}} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{\mathrm{KD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{\mathrm{DK}} = 2\overrightarrow{\mathrm{DF}} \iff \overrightarrow{\mathrm{DK}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DF}}$
Comme D(0; 0; 0) et F(1 ; 1 ; 1), l'égalité précédente donne :
$x_{\mathrm{K}} = \dfrac{2}{3}(1) = \dfrac{2}{3}$, $y_{\mathrm{K}} = \dfrac{2}{3}(1) = \dfrac{2}{3}$, $z_{\mathrm{K}} = \dfrac{2}{3}(1) = \dfrac{2}{3}$.
Donc $\mathrm{K}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.
2. E(1; 0; 1) donc $\overrightarrow{\mathrm{EK}}\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{DF}}(1\,;\,1\,;\,1)$.
Donc $\overrightarrow{\mathrm{EK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = 0$.
Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
3. On a $\mathrm{EK}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{EK}}\|^2 = \overrightarrow{\mathrm{EK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EK}} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{6}{9} \Rightarrow \mathrm{EK} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Partie B

1. Quel que soit le point M, la base EMF du tétraèdre EMFD est incluse dans la face supérieure du cube EFGH qui est perpendiculaire à l'arête [DH] qui est donc une hauteur du tétraèdre relative à la base EMF.

Quelle que soit la position du point M, l'aire de la base est l'aire d'un triangle de base 1 et de hauteur [EH] dont la longueur est aussi 1. On a donc :

$\mathscr{A}(\text{E}M\text{H}) = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

D'où le volume cherché : $\mathscr{V}(\text{E}M\text{FD}) = \dfrac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

2. Par définition de M, M, F et D ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan unique.

On a $M(0\,;\,m\,;\,1)$; donc $M(0\,;\,m\,;\,1) \in M\text{FD} \iff (-1+m)\times 0 + m - m \times 1 = 0$ qui est vraie.

F(1 ; 1 ; 1) ; donc $\text{E}(1\,;\,0\,;\,1) \in M\text{FD} \iff (-1+m)\times 1 + 1 - m \times 1 = 0$ qui est vraie.

Enfin $\text{D}(0\,;\,0\,;\,0) \in M\text{FD} \iff (-1+m)\times 0 + 0 - m \times 0 = 0$ qui est vraie.

Conclusion : $(-1+m)x + y - mz = 0$ est bien une équation du plan $(M\text{FD})$.

3. a. On sait que $d_m = d(\text{E}\,;\,(M\text{FD})) = \dfrac{|(-1+m)x_\text{E} + y_\text{E} - mz_\text{E}|}{\sqrt{(-1+m)^2 + 1^2 + m^2}} =$

$\dfrac{|(-1+m+0-m|}{\sqrt{1+2m^2-2m+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

b. La distance maximale correspond à la valeur minimale de $\sqrt{2m^2-2m+2}$ c'est-à-dire du trinôme $2m^2-2m+2$.

Or $2m^2-2m+2 = 2\left(m^2-m+1\right) = 2\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right] = 2\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$.

La valeur minimale de cette somme de deux carrés est obtenue quand le premier carré est nul, soit quand $m = \frac{1}{2}$ (valeur possible puisque $0 \leqslant m \leqslant 1$) et le minimum vaut alors $\dfrac{3}{2}$.

La distance maximale est donc égale à $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

c. Or $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \text{EK}$.

D'autre part on sait que le barycentre K appartient à la droite (DF) donc au plan $(M\text{FD})$.

Lorsque la distance du point E au plan $(M\text{FD})$ est maximale, soit quand M est le milieu de [HG], le point K est le projeté orthogonal du point E sur le plan $(M\text{FD})$.