

Durée : 4 heures

✻ Corrigé du baccalauréat S Polynésie ✻
septembre 2005

EXERCICE 1

5 points

1. À partir de $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & b_1 &= \frac{1}{3} & c_1 &= \frac{2}{3} \\ a_2 &= \frac{1}{6} & b_2 &= 0 & c_2 &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \\ a_3 &= 0 & b_3 &= \frac{1}{18} & c_3 &= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{17}{18} \end{aligned}$$

2. a. De trois choses l'une : ou la puce est en A, ou elle est en B, ou elle est en C ; d'où $a_n + b_n + c_n = 1$.

D'autre part elle ne peut être en A que si elle était précédemment en B :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n \text{ et elle ne peut être en B que si elle était précédemment en A,}$$

$$\text{soit } b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n.$$

b. D'après la question précédente : $a_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1}$ et $b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$; donc $a_{n+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} a_n \right) = \frac{1}{6} a_n$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On a $a_{2 \times 0} = 1 = \left(\frac{1}{6} \right)^0$ (initialisation).

Hérédité : supposons que $a_{2p} = \left(\frac{1}{6} \right)^p$ et calculons $a_{2p+2} = \frac{1}{6} a_{2p}$

$= \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6} \right)^p = \left(\frac{1}{6} \right)^{p+1}$. La formule est donc vraie au rang $p+1$. La récurrence est établie. D'autre part par récurrence immédiate : $a_1 = a_3 = \dots = a_{2p+1} = 0$.

Il suit que $b_{2p} = \frac{1}{3} a_{2p-1} = 0$ quel que soit p .

$$\text{Calculons } b_{2p+1} = \frac{1}{3} a_{2p} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^p.$$

3. Pour (a_n) : les termes de rang impair sont nuls, et on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Pour la même raison $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Or $c_n = 1 - a_n - b_n$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$. Au bout d'un certain temps la puce sera pratiquement toujours dans la case C.

EXERCICE 2

5 points

Partie A

1. $y^2 - x^2 = 16 \iff y^2 = x^2 + 16 \iff \begin{cases} y = \sqrt{x^2 + 16} \\ y = -\sqrt{x^2 + 16} \end{cases}$. La représentation graphique de \mathcal{H} est donc la réunion de la représentation \mathcal{C} de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 16}$ et de la courbe \mathcal{C}' symétrique autour de (Ox) de \mathcal{C} .

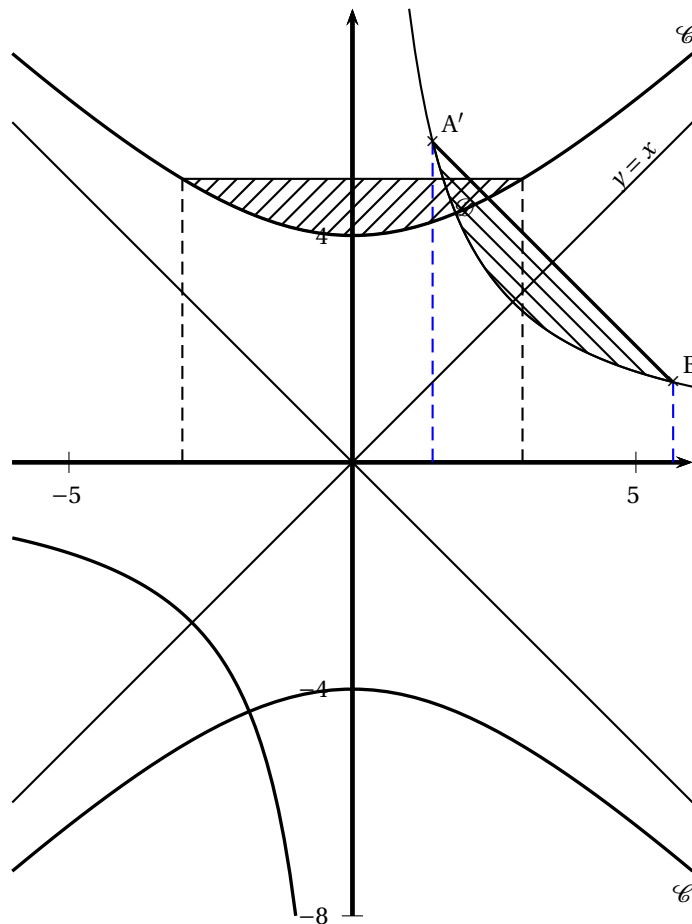
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ est définie sur \mathbb{R} ; composée de deux fonctions dérivables, elle est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$. La fonction est donc décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ .

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- a. Calculons $\Delta(x) = f(x) - x = \sqrt{x^2 + 16} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 16} - x)(\sqrt{x^2 + 16} + x)}{\sqrt{x^2 + 16} + x} = \frac{x^2 + 16 - x^2}{\sqrt{x^2 + 16} + x} = \frac{16}{\sqrt{x^2 + 16} + x}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Delta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta(x) = 0_+$. Ceci signifie que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à \mathcal{C} au voisinage de l'infini, la courbe restant au-dessus de son asymptote.

b.



Par différence avec l'aire du rectangle, on a $\text{aire}(\mathcal{D}) = 30 - \int_{-3}^3 \sqrt{x^2 + 16} \, dx$ (u.a.).

Partie B

1. a. La rotation a pour écriture complexe : $z' = ze^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b. Avec $z = x + iy$ et par identification $x' + iy' = (x + iy) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ on ob-

$$\text{tient : } \begin{cases} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases}$$

On a $A'(\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$ et $B'(4\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

2. a. Cf. figure ci-dessus.

$$\text{b. Si } M(x; y) \in \mathcal{C}, \text{ alors } \begin{cases} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \sqrt{x^2 + 16}) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + \sqrt{x^2 + 16}) \end{cases} . \text{ D'où}$$

$$x' \times y' = \frac{x^2 + 16 - x^2}{2} = 8.$$

De même avec un point de \mathcal{C}' . Ceci signifie que l'image de \mathcal{H} par la rotation r est bien \mathcal{H}' .

3. a. Cf. la figure ci-dessus.

b. Par différence avec l'aire d'un trapèze (on pouvait également utiliser le rectangle du 2. a. de la **Partie A** on a :

$$\text{aire}(\mathcal{D}') = \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times (4\sqrt{2} - \sqrt{2}) - \int_{\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} \frac{8}{x} dx = 15 - 8 [\ln x]_{\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} = 15 - 8 \ln 4.$$

La rotation conservant les aires, on a :

$$\text{aire}(\mathcal{D}') = \text{aire}(\mathcal{D}) = 15 - 8 \ln 4 \approx 3,910 \text{ (u.a. ou cm}^2\text{)}$$

EXERCICE 3

3 points

1. Réponse : **b.**
2. Réponse : **c.**
3. Réponse : **a.**

EXERCICE 4

5 points

1. a. On a $-1 \leq \cos(4x) \leq 1$, donc par produit :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

b. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, d'après le théorème des « gendarmes » :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est donc asymptote à Γ au voisinage de plus l'infini.

2. On sait que $e^{-x} \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc $e^{-x} = e^{-x} \cos(4x) \iff \cos(4x) = 1 \iff 4x = 0 [2\pi] \iff x = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$.

Les points communs aux deux courbes sont donc les points $M_k \left(k \frac{\pi}{2}; e^{-k \frac{\pi}{2}} \right)$.

3. a. $u_{n+1} = f \left((n+1) \frac{\pi}{2} \right) = e^{-(n+1) \frac{\pi}{2}} = e^{-n \frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{\pi}{2}} = u_n \times e^{-\frac{\pi}{2}}$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

b. $e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,2$ et $u_0 = 1$ donc la suite est positive et décroissante et d'après la question 1. a. la limite de cette suite est nulle.

4. a. On a $f'(x) = -e^{-x} \cos(4x) - e^{-x} \times 4 \sin(4x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)]$.
De même $g'(x) = -e^{-x}$.
- b. Or si $x = k\frac{\pi}{2}$, $\cos(4x) = 1$ et $\sin(4x) = 0$.
On a donc $f'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-k\frac{\pi}{2}}$. Donc les courbes Γ et \mathcal{C} ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5. On a $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}} \approx -0,2$.