Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Polynésie ∾ septembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

1. a. On a $c-a=2+2\mathrm{i}$ et $b-a=2-2\mathrm{i}$; or $c-a=2+2\mathrm{i}=\mathrm{i}(2-2\mathrm{i})=\mathrm{i}(b-a)$.
Cette égalité signifie que C est l'image de B dans le quart de tour direct de centre A. Donc le triangle ABC est rectangle en A.

b. On a $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}=\dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}}$. Donc $\arg\left(\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M}\right)$

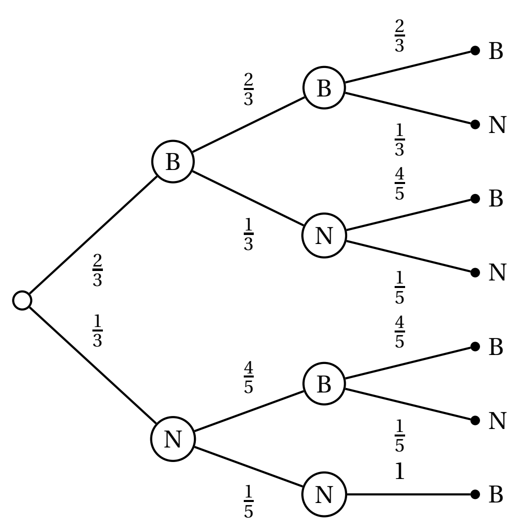
c. Le nombre $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}$ est un réel strictement négatif si et seulement si l'un des ses arguments est égal à π. D'après le b, on a donc $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}\in\mathbb{R}^-\iff\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M}\right)=\pi\quad[2\pi]\iff M\in]\mathrm{AB}[$. L'ensemble cherché est donc le segment ouvert]AB[.

2. a. Si z' est l'affixe du point image du point d'affixe z dans la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, cette affixe vérifie $z'-\omega=-\mathrm{i}(z-\omega)\iff$
$z'=-\mathrm{i}z+\omega(1+\mathrm{i})\iff z'=z'=-\mathrm{i}z+(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\iff\boxed{z'=-\mathrm{i}z+3+\mathrm{i}}$.

b. ABC étant rectangle isocèle en A, le centre E du cercle circonscrit Γ est le milieu de [BC] d'affixe 5 et son rayon est égal à 2.
Une rotation est une isométrie donc l'image du cercle Γ est le cercle Γ' dont le centre est E′, image de E par r et de même rayon 2.
On a alors : $z_{\mathrm{E}'}=z'_{\mathrm{E}}=-\mathrm{i}z_{\mathrm{E}}+3+\mathrm{i}=-5\mathrm{i}+3+\mathrm{i}=3-4\mathrm{i}$.
Une équation paramétrique de Γ' est alors : $z-z_{E'}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta\in[0\,;\,2\pi[$ donc :
$\boxed{z=3-4\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta\in[0\,;\,2\pi[}$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. a. On dresse l'arbre pondéré suivant :



Les valeurs prises par X sont (de haut en bas) : 0,1, 1, 2, 1, 2, 2.

b. On a $P(X=0)=P(BBB)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$.

c. — La probabilité demandée s'obtient en suivant la troisième branche. Elle est égale à $P(BNB) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{45}$.

— On a de même $P(NBB) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{75}$.

$P(BBN) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}$.

Finalement $P(X = 1) = P(BBB) + P(BNB) + P(BBN) = \dfrac{8}{45} + \dfrac{16}{75} + \dfrac{4}{27} = \dfrac{120 + 144 + 100}{27 \times 25} = \dfrac{364}{675}$.

2. — $P(\mathrm{A}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2^{k-1}}{3^k}$.

— $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$. On sait donc que l'on a tiré une noire au k-ième tirage. Il reste donc 4 blanches et une noire. On tire $(n - k)$ boules blanches avec une probabilité de $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-k}$.

— Si seule la k-ième boule tirée est noire c'est que $\mathrm{N} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

On a donc $p(\mathrm{N}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{A}) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-k} \times \dfrac{2^{k-1}}{3^k} = \dfrac{2^{2n-k-1}}{3^k \times 5^{n-k}}$.

EXERCICE 3 — 7 points

1. a. En écrivant $f(x) = 2x^3\mathrm{e}^{-x} - 4x^2\mathrm{e}^{-x}$ les deux termes de la somme ont pour limite moins l'infini, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

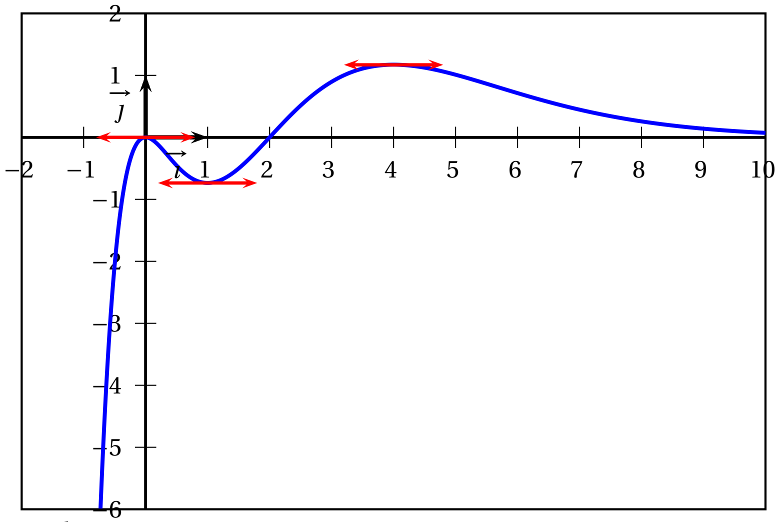
De la même façon en plus l'infini, les deux termes ont pour limite 0 (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$ (croissances comparées)), donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. La dérivée de la fonction f est donnée par
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-2x^3 + 10x^2 - 8x\right) = 2x\mathrm{e}^{-x}\left(-x^2 + 5x - 4\right)$.

c. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de la dérivée est celui de $x\left(-x^2 + 5x - 4\right)$. Le trinôme a pour racines 1 et 4, donc le signe de la dérivée dépend de la position de x par rapport aux nombres 0, 1 et 4. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
trinôme		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{2}{\mathrm{e}}$	↗	$\frac{64}{\mathrm{e}^4}$	↘	0

d. Courbe représentative $(\mathscr{C})$:



2. **a.** $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Avec $\left\{\begin{array}{ll} u(x) = x & \mathrm{d}v(x) = \mathrm{e}^{-x}\\ \mathrm{d}u(x) = 1 & v(x) = -\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$ on obtient en intégrant par parties, toutes les fonctions étant dérivables et leurs dérivées continues,

$\mathrm{I}_1 = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

b. L'égalité $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donne pour $n = 2$, $\mathrm{I}_2 = 2\mathrm{I}_1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}} = 2 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$.

Pour $n = 3$, $\mathrm{I}_3 = 3\mathrm{I}_2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 3\left(2 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}\right) - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 6 - \dfrac{16}{\mathrm{e}}$.

c. L'aire du domaine défini est égal (en unités d'aire) à la valeur absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - 4\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{I}_3 - 4\mathrm{I}_2$ (par linéarité de l'intégrale).

On a donc $\displaystyle\int_0^1 \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\left(6 - \dfrac{16}{\mathrm{e}}\right) - 4\left(2 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}\right) = 4 - \dfrac{12}{\mathrm{e}}$.

Conclusion $\mathscr{A} = \dfrac{12}{\mathrm{e}} - 4 \approx 0,4$.

Effectivement sur la figure, sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction est négative et l'aire vaut moins de $\dfrac{1}{2}$ carreau (cm^2).

3. **a.** Pour tout x de $\left[\dfrac{1}{b}\,;\,\dfrac{1}{a}\right]$, on définit $v(x)$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$. v est la composée de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, décroissante sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\,\dfrac{1}{a}\right]$ et à valeurs dans $[a\,;\,b]$ et de la fonction u, supposée croissante sur $[a\,;\,b]$. Par composition, on obtient une fonction décroissante sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\,\dfrac{1}{a}\right]$.

b. On a donc $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{4}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

En posant $\dfrac{1}{x} = \alpha$, $g(\alpha) = \left(2\alpha^3 - 4\alpha^2\right)\mathrm{e}^{-\alpha}$. On obtient alors facilement $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} g(\alpha) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

c. De même qu'au 2 a, on démontrerait que si u est décroissante, alors v est croissante. Le tableau de variations de g se déduit donc de celui de f après avoir remarqué que si $1 < 4$, alors $\dfrac{1}{4} < 1$. Les intervalles de variations sont donc $\left]0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,1\right]$ et $[1\,;\,+\infty[$: d'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$\frac{64}{\mathrm{e}^4}$	$\searrow$	$-\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0

EXERCICE 4 **5 points**

1. Un vecteur $\overrightarrow{n}_1$ normal à (P_1) est $\overrightarrow{n}_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. Un vecteur $\overrightarrow{n}_2$ normal à (P_2) est $\overrightarrow{n}_1\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont non nuls et $\overrightarrow{n}_1\cdot\overrightarrow{n}_2 = -2\times1+1\times(-2)+1\times 4 = 0$. Ces vecteurs étant orthogonaux, les deux plans sont perpendiculaires.
2. En posant $z = t$ les coordonnées de la droite commune aux deux plans vérifient $\begin{cases}-2x+y &= 6-t\\ x-2y &= 9-4t\end{cases} \iff \begin{cases}-2x+y &= 6-t\\ 2x-4y &= 18-8t\end{cases} \Rightarrow$ $-3y = 24-9t \iff y = -8+3t$ et en reportant dans l'une des équations des plans $x = -7+2t$.

   Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (P_1 \cap (P_2) = (\mathrm{D}) \iff \begin{cases} x &= -7+2t\\ y &= -8+3t\\ z &= t\end{cases}$.
3. **a.** On a $-18-4-1-6=0$ Faux et $-9+8-4-9=0$ Faux

   b. $\mathrm{A}M^2 = (x+9)^2+(y+4)^2+(z+1)^2 = (2+2t)^2+(-4+3t)^2+(t+1)^2 =$ $14t^2-14t+21 = 7\left(2t^2-2t+3\right)$.

   c. $f(t) = 2t^2-2t+3 = 2\left(t^2-t+\dfrac{3}{2}\right) = 2\left[\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\right] =$ $2\left[\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}\right] \geqslant 2\times\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{2} > 0$. Ce trinôme est donc décroissant sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, croissant sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ et a un minimum en $\dfrac{1}{2}$.

   Le point correspondant est $M_{\text{mini}} = \mathrm{I}\left(-6\,;\,-\dfrac{13}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
4. **a.** La représentation paramétrique de (D) donne les coordonnées d'un vecteur directeur de (D), donc un vecteur normal à (Q), c'est le vecteur $\overrightarrow{q}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

   Une équation de (Q) est donc : $2x+3y+z+\alpha = 0$. $\mathrm{A} \in (\mathrm{Q}) \iff$ $-18-12-1+\alpha = 0 \iff \alpha = 31$.

   Une équation de (Q) est donc : $M \in (\mathrm{Q}) \iff 2x+3y+z+31 = 0$.

   b. Le triangle AMI est rectangle en I. Le côté [AI] a une longueur inférieure à celle de l'hypoténuse [AM] : I est bien le projeté orthogonal de A sur (D) .