Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Polynésie septembre 2007

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Les courbes 2 et 3 ne vérifient pas P_3.

   Par contre le courbe 1 semble représenter une fonction de (E) : en particulier la courbe est sous la droite $y = x$.

   b. Une fonction f de (E) vérifie P_3 donc $f(x) \leqslant x \iff x - f(x) \geqslant 0$. Comme $0 < 1$, I_f représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe, la droite (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Donc $I_f \geqslant 0$.

2. **a.** $h(x) = 2^x - 1 = \mathrm{e}^{x\ln 2} - 1$. Cette fonction est dérivable et $h'(x) = \ln 2\mathrm{e}^{x\ln 2} > 0$ car les deux facteurs sont positifs : la fonction h est donc croissante et vérifie P_1.

   $h(0) = 1 - 1 = 0$ et $h(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.

   h vérifie P_2.

   b. Soit $\varphi(x) = 2^x - x - 1$. Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

   $\varphi'(x) = \ln 2\mathrm{e}^{x\ln 2} - 1$ et

   $\varphi''(x) = (\ln 2)^2\mathrm{e}^{x\ln 2} > 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		α		1
φ''		$+$		$+$	
φ'	$\ln 2 - 1 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\ln 2 - 1 > 0$
φ	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

   Ce tableau montre que sur $[0\,;\,1]$, $\varphi(x) \leqslant 0 \iff 2^x - -1 - x \leqslant 0 \iff 2^x - 1 \leqslant x \iff h(x) \leqslant x$.

   On a donc démontré que h vérifie la propriété P_3, donc appartient à (E).

   c. $I_h = \displaystyle\int_0^1 \left[x - \left(2^x - 1\right)\right]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x - \mathrm{e}^{x\ln 2} + 1\right]\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2^x}{\ln 2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

3. **a.** P vérifie $P_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ a + b + c & = & 1 \end{array}\right.$

   Donc $c = 0$ et $b = 1 - a$. Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$,

   $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.

   — $P'(x) = 2ax + (1 - a)$. Sur $[0\,;\,1]$, $2ax \geqslant 0$ et $1 - a > 0$, donc $P'(x) > 0$: la fonction P est croissante sur $[0\,;\,1]$.

   — $P(0) = 0$ et $P(1) = a + 1 - a = 1$. P vérifie P_2.

   — Considérons $P(x) - x = ax^2 + (1 - a)x - x = ax^2 - ax = ax(x - 1)$. Comme $a > 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x - 1 \leqslant 0$, $P(x) - x \leqslant 0 \iff P(x) \leqslant x$. Donc P vérifie P_3 et finalement $P \in$ (E)

b. $I_P = \displaystyle\int_0^1 \left[x - ax^2 - (1-a)x\right]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(ax - ax^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{ax^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$.

c. $I_P = I_h \iff \dfrac{a}{6} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2} \iff a = 9 - \dfrac{6}{\ln 2}$.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** On a A$(3\,;0\,;0)$, C$(0\,;3\,;0)$ et E$(3\,;0\,;3)$.

b. L barycentre du système $\{(\mathrm{C}\,;\,2),\ (\mathrm{E}\,;\,1)\} \iff 2\overrightarrow{\mathrm{LC}} + \overrightarrow{\mathrm{LE}} = 0$

$\iff \begin{cases} 2\times(-x)+3-x &= 0 \\ 2(3-y)+0-y &= 0 \\ 2(0-z)+3-z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 &= x \\ 2 &= y \\ 1 &= z \end{cases}$. Donc L$(1\,;2\,;1)$

c. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DL}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. **a.** $\overrightarrow{\mathrm{A}M}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{D}M} \iff \overrightarrow{\mathrm{D}M} = \overrightarrow{\mathrm{A}M} + \overrightarrow{\mathrm{DA}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{MN}$ orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AE}} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 0 \iff \left(\overrightarrow{M\mathrm{D}} + \overrightarrow{\mathrm{D}N}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 0 \iff$
$-3a\times 3 + b\times 3 = 0 \iff 3a - b = 0$.
De même $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DL}} = 0 \iff \left(\overrightarrow{M\mathrm{D}} + \overrightarrow{\mathrm{D}N}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{DL}} = 0 \iff$
$-3\times 1 - 3a\times 1 + b\times 1 + 2b\times 2 + b\times 1 \iff -3-3a+6b = 0 \iff -a+2b = 1$.
D onc $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DL}}$ si et seulement si le couple $(a,\ b)$ vérifie le système $\begin{cases} -a+2b &= 1 \\ 3a-b &= 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -a+2b &= 1 \\ 3a-b &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a+2b &= 1 \\ 6a-2b &= 0 \end{cases} \Rightarrow 5a = 1 \iff a = \dfrac{1}{5}$, puis $b = \dfrac{3}{5}$. Ce système a un seul couple solution.

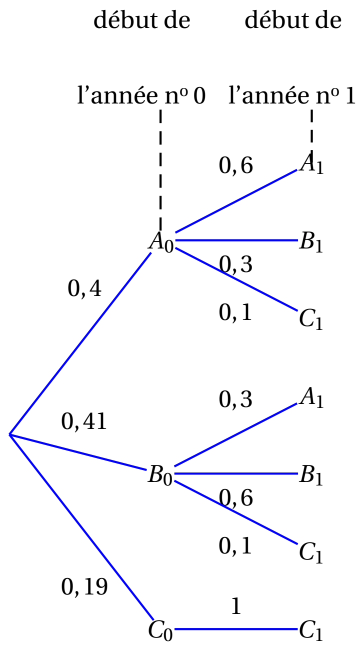
Il existe donc un seul point M_0 de (AE) de coordonnées $\left(3\,;\,0\,;\,\frac{3}{5}\right)$ et un seul point N_0 de (DL) de coordonnées $\left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{6}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right)$ tels que la droite $(\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0)$ est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. On calcule $\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0^2 = \left(\dfrac{6}{5} - 3\right)^2 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 + 0^2 = \dfrac{144}{25} + \dfrac{36}{25} = \dfrac{180}{25} = \dfrac{36}{5}$.

Donc la distance (la plus courte) entre (AE) et (DL) est égale à $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

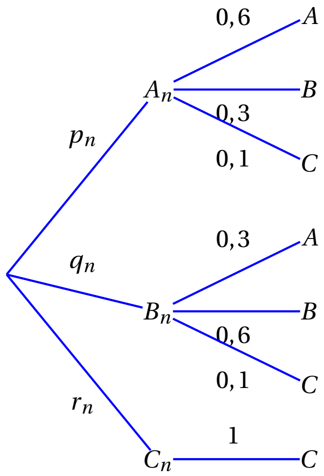
EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1.



2. **a.** On a $p_1 = p(\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A}_1) + p(\mathrm{B}_0 \cap \mathrm{A}_1) = 0,4 \times 0,6 + 0,41 \times 0,6 = 0,24 + 0,123 = 0,363$.
De même on calcule $q_1 = p(\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{B}_1) + p(\mathrm{B}_0 \cap \mathrm{B}_1) = 0,4 \times 0,3 + 0,41 \times 0,6 = 0,12 + 0,3246 = 0,366$.
Et $r_1 = p(\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{C}_1) + p(\mathrm{B}_0 \cap \mathrm{C}_1) + p(\mathrm{C}_0 \cap \mathrm{C}_1) = 0,4 \times 0,1 + 0,41 \times 0,1 + 0,19 \times 1 = 0,04 + 0,041 + 0,19 = 0,271$.
On vérifie que $0,363 + 0,366 + 0,271 = 1,000$

b.



En reprenant les deux premières branches en remplaçant A par A_n (avec une probabilité p_n d'y arriver) et B par B_n (avec une probabilité q_n d'y arriver), on obtient

$$\left\{\begin{array}{lll} p_{n+1} & = & 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} & = & 0,3p_n + 0,6q_n \end{array}\right.$$

3. **a.** $S_n = q_n + p_n$ donc $S_{n+1} = q_{n+1} + p_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n + 0,6p_n + 0,3q_n = 0,9q_n + 0,9p_n = 0,9\left(q_n + p_n\right) = 0,9S_n$ ce qui montre que la suite (S_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $q_0 + p_0 = 0,81$.
De même $D_n = q_n - p_n$, donc $D_{n+1} = q_{n+1} - p_{n+1} =$
$0,3p_n + 0,6q_n - \left(0,6p_n + 0,3q_n\right) = 0,3q_n - 0,3p_n = 0,3\left(q_n - p_n\right) = 0,3D_n$.
Donc (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3 de premier terme
$q_0 - p_0 = 0,01$.

b. On sait que $S_n = (0,9)^n \cdot S_0 = (0,9)^n \times 0,81$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$. (car $-1 < 0,9 < 1$).
Même limite pour la suite (D_n).

c. On a : $\left\{\begin{array}{lcl} S_n = q_n + p_n & = & 0,81 \cdot (0,9)^n \\ D_n = q_n - p_n & = & 0,01 \cdot (0,3)^n \end{array}\right.$

On en déduit par différence et par somme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_n & = & \dfrac{1}{2}(S_n - D_n) \\ q_n & = & \dfrac{1}{2}(S_n + D_n) \end{array}\right.$$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$.
D'après la loi des probabilités totales on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = 1.$$

Cela signifie qu'à longue échéance il n'y aura plus que des plantes du type C (ce qui semble normal puisque seules celles-ci se remplacent, alors que celles du type A et B se raréfient.)

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe . Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport 2 et d'angle θ. Soit :

- les points A$'$ et B$'$, images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment [A$'$ B] et J, milieu du segment [A B$'$] ;
- le point M milieu du segment [AA$'$] ;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H$'$ image du point H par la similitude σ.

Partie A. étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6 + 4\text{i}$, le point B a pour affixe $2 + 4\text{i}$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe 4i.
La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. L'écriture complexe de la similitude σ est $z' = \dfrac{\text{i}}{2}z$.

On a donc $z_{\text{A}'} = \dfrac{\text{i}}{2}(-6 + 4\text{i}) = -2 - 3\text{i}$.

$z_{\text{B}'} = \dfrac{\text{i}}{2}(2 + 4\text{i}) = -2 + \text{i}$.

$z_{\text{H}'} = \dfrac{\text{i}}{2}(4\text{i}) = -2$.

2. I a pour affixe $\dfrac{\text{i}}{2}$, J $\left(-4 + \dfrac{5\text{i}}{2}\right)$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$ est donc $(-4 + 2\text{i})$ et celle du vecteur $\overrightarrow{\text{HH}'}$ $(-2 - 4\text{i})$.

On a donc $\overrightarrow{\text{IJ}} \cdot \overrightarrow{\text{HH}'} = (-4) \times (-2) + 2 \times (-4) = 8 - 8 = 0$, ce qui montre que ces vecteurs sont orthogonaux et donc que (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH$'$).

Partie B. étude du cas général

1. **a.** On sait que (OH) $\perp$ (AB) : la similitude conservant les angles, on en déduit que (OH$'$) $\perp$ (A$'$B$'$).
   D'autre part une similitude conservant l'alignement :
   H $\in$ (AB) entraîne que H$'$ $\in$ (A$'$B$'$).
   Conclusion : le point H$'$ est le projeté orthogonal de O sur la droite (A$'$B$'$).

   b. Dans le triangle AA$'$B la droite (MI) est la droite des « milieux » : donc $\overrightarrow{\text{MI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$.
   On admet que $\overrightarrow{\text{MJ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}$. (même théorème)

   c. On en déduit que $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{A}'\text{B}'}{\text{AB}} = 2$ (rapport de la similitude).
   Or on sait d'après la question précédente que $\dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}} = \dfrac{\text{A}'\text{B}'}{\text{AB}} = 2$; donc finalement $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}}$.
   D'autre part (MB) étant parallèle à (AB) et (MJ) parallèle à (A$'$B$'$), on a $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}},\ \overrightarrow{\text{OH}'}\right)$ à $2k\pi$, près.
   Donc finalement $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{MJ}})\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}},\ \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. On considère les points M, I et J et leurs images respectives O, H et K par s.

   a. On a $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{OK}}{\text{OH}} = \dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}}$ (d'après la question précédente) ; donc OK= OH$'$.
   De même $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}},\ \overrightarrow{\text{OK}}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \left(\overrightarrow{\text{OH}},\ \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \theta + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   b. On en déduit que le point H$'$ est le point K, donc l'image du point J par la similitude s.

3. L'angle $\left(\overrightarrow{\text{IJ}},\ \overrightarrow{\text{HH}'}\right)$ est égal à l'angle de la similitude s ; il en est de même pour l'angle $\left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{OH}}\right)$.
   Donc $\left(\overrightarrow{\text{IJ}},\ \overrightarrow{\text{HH}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{OH}}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{IJ}},\ \overrightarrow{\text{HH}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MI}},\ \overrightarrow{\text{OH}}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   On a vu que (OH) $\perp$ (AB) et que (MI) est parallèle à (AB), donc (MI) est perpendiculaire à (OH). L'angle de la similitude s est donc égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
   D'après l'égalité ci-dessus la droite (IJ) est donc perpendiculaire à la droite (HH$'$).