∽ Corrigé du baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

1. Sur 300 personnes, 225 utilisent l'escalier; $p\left(\overline{E}\right) = \dfrac{225}{300} = \dfrac{3}{4}$. D'où

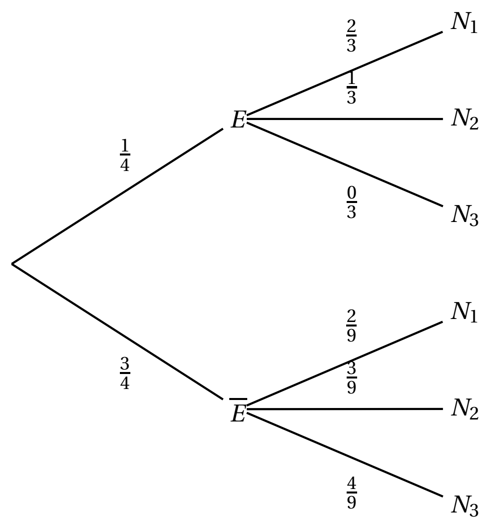
$p(\text{E}) = 1 - p\left(\overline{E}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Sur les 225 personnes empruntant l'ascenseur la répartition 50, 75, 100 suivant les étages conduit à :

$$p_{\overline{E}}(N_1) = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}, \quad p_{\overline{E}}(N_2) = \frac{75}{225} = \frac{3}{9}, \quad p_{\overline{E}}(N_3) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}$$

Sur les 75 personnes empruntant l'escalier, on obtient de même :

$$p_E(N_1) = \frac{1}{3}, \quad p_E(N_2) = \frac{2}{3}, \quad p_E(N_3) = \frac{0}{3}$$



2. **a.** On a $p(\text{E} \cap \text{N}_2) = p(\text{E}) \times p_{\text{E}}(\text{N}_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$.

b. Vont au 1^er^ étage : 50 (ascenseur) + $75 \times \dfrac{2}{3} = 50 = 100$ personnes;

Vont au 2^e^ étage : 75 (ascenseur) + $75 \times \dfrac{1}{3} = 25 = 100$ personnes;

Vont au 3^e^ étage : 100 (ascenseur) personnes.

Les évènements N_1, N_2, N_3 sont bien équiprobables.

c. Il faut trouver : $p_{N_2}(E) = \dfrac{p(E \cap N_2)}{p(N_2)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$.

3. **a.** Une personne prise au hasard a une probabilité d'aller au 2^e^ étage égale à $p(N_2) = \dfrac{1}{3}$.

Les réponses des 20 étant indépendantes les unes des autres, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p = \dfrac{1}{3}$ et $n = 20$.

b. On a donc :

$$p(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{20-5} = 15\,504 \times \frac{2^{15}}{3^{20}} \approx 0{,}1457.$$

c. La moyenne pour les 20 personnes d'aller au 2e étage est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, soit : $\text{E}(X) = n \times p = 20 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{20}{3} \approx 7$.
Un peu moins de 7 personnes sur 20 vont au 2e étage.

4. On reprend la variable aléatoire suivant la loi binomiale de probabilité $\dfrac{1}{3}$ avec n personnes.

Il faut trouver : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$ soit $p(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

La condition est réalisée si :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \iff \ln 0,01 \geqslant n \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{(par croissance de la fonction ln)} \iff \frac{\ln 0,01}{\ln \frac{2}{3}} \leqslant n$$

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln \frac{2}{3}} \approx 11,3$. Il faut donc prendre au minimum 12.
Conclusion : sur 12 personnes, au moins une va au niveau 2 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 2 — 4 points

Partie A

1. En utilisant l'égalité de Chasles avec le point I,
$M\text{A}^2 = \overrightarrow{M\text{A}} \cdot \overrightarrow{M\text{A}} = \left(\overrightarrow{M\text{I}} + \overrightarrow{\text{IA}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\text{I}} + \overrightarrow{\text{IA}}\right) = M\text{I}^2 + \text{IA}^2 + 2\overrightarrow{M\text{I}} \cdot \overrightarrow{\text{IA}}$.
De même $M\text{B}^2 = M\text{I}^2 + \text{IB}^2 + 2\overrightarrow{M\text{I}} \cdot \overrightarrow{\text{IB}}$.
Par somme on obtient :
$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 = 2M\text{I}^2 + \text{IA}^2 + \text{IB}^2 + 2\overrightarrow{M\text{I}} \cdot \overrightarrow{\text{IA}} + 2\overrightarrow{M\text{I}} \cdot \overrightarrow{\text{IB}} =$
$2M\text{I}^2 + \dfrac{\text{AB}^2}{4} + \dfrac{\text{AB}^2}{4} + 2\overrightarrow{M\text{I}} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{IB}}\right)}_{=\overrightarrow{0}} = 2M\text{I}^2 + \dfrac{1}{2}\text{AB}^2$.

2. En utilisant le résultat précédent :
$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 = \text{AB}^2 \iff 2M\text{I}^2 + \dfrac{1}{2}\text{AB}^2 = \text{AB}^2 \iff 2M\text{I}^2 = \dfrac{1}{2}\text{AB}^2 \iff$
$M\text{I}^2 = \dfrac{1}{4}\text{AB}^2 \iff M\text{I} = \dfrac{1}{2}\text{AB}$.
Les points M sont à la distance $\dfrac{1}{2}\text{AB}$ du point fixe I milieu de [AB] : l'ensemble (E) est donc la sphère de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}\text{AB}$.

Partie B

1. $\overrightarrow{p}\,(3\,;\,4\,;\,1)$ et $\overrightarrow{q}\,(1\,;\,-2\,;\,-1)$ sont des vecteurs normaux respectivement à (P) et (Q).
Or $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{q}$ ne sont pas colinéaires car leurs cordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les plans ne sont pas parallèles : ils sont sécants en (Δ).

a. A appartient à la droite (Δ) si et seulement s'il appartient aux deux plans (P) et (Q).
$\text{A}(-1\,;\,0\,;\,4) \in \text{P}) \iff 3 \times (-1) + 4 \times 0 + 1 \times 4 - 1 = 0$: vrai ;
$\text{A}(-1\,;\,0\,;\,4) \in \text{Q}) \iff 1 \times (-1) - 2 \times 0 - 1 \times 4 + 5 = 0$: vrai.
Conclusion A est un point de (Δ).

b. On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{p} = 1\times 3+(-2)\times 4+5\times 1 = 8-8 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{p}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{q} = 1\times 1+(-2)\times(-2)+5\times(-1) = 5-5 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{q}$ sont orthogonaux .
Donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) commune aux deux plans (P) et (Q).
On peut aussi considérer le point C de cordonnées :
$(-1+1=0\ ;\ 0-2=-2\ ;\ 4+5=9)$ et montrer que ce point appartient lui aussi à (P) et à (Q) donc à (Δ) et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{u}$...

c. On sait que la droite est définie par le point A et un de ses vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$.
On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\Delta) \iff$ il existe $t\in\mathbb{R}/\overrightarrow{\mathrm{A}M} = t\overrightarrow{u} \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x+1 &=& 1t\\ y-0 &=& -2t\\ z+4 &=& 5t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t-1\\ y &=& -2t\\ z &=& 5t-4\end{array}\right.$ $t\in\mathbb{R}$, système d'équations paramétriques de la droite (Δ).

Autre méthode (plus compliquée) :
$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\Delta) \iff M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\mathrm{P})\cap(\mathrm{Q}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y+z-1 &=& 0\\ x-2y-z+5 &=& 0\end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y &=& -z+1\\ x-2y &=& z-5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y &=& -z+1\\ 3x-6y &=& 3z-15\end{array}\right. \Rightarrow 10y = -4z+16 \iff y = -\frac{2}{5}z+\frac{8}{5}$
En reportant dans l'équation de (Q) on obtient :
$x-2y-z+5=0 \iff x = 2y+z-5 = -\frac{4}{5}z+\frac{16}{5}+z-5 = \frac{1}{5}z-\frac{9}{5}$. D'où en posant $z=t$ ($t\in\mathbb{R}$)
$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\Delta) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{5}t-\frac{9}{5}\\ y &=& -\frac{2}{5}t+\frac{8}{5}\\ z &=& t\end{array}\right.$$

2. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de (Δ) ; en utilisant ses coordonnées paramétriques on a :
$M\mathrm{A}^2+M\mathrm{B}^2 = \mathrm{AB}^2 \iff (-1-t+1)^2+(0+2t)^2+(4-5t+4)^2+(t-4)^2+(-2t+4)^2+(5t+2)^2 = (3+1)^2+(-4)^2+(2-4)^2 \iff t^2+4t^2+25t^2+64-80t = 16+16+4 \iff 60t^2-4t0 = 0 \iff 15t^2-t=0 \iff t(15t-1)=0.$
Il y a donc deux solutions : l'une correspondant à $t=0$ et donnant le point $M_1(-1\ ;\ 0\ ;\ 4)$, soit le point A, l'autre correspondant à $t=\frac{1}{15}$ donnant le point $M_2\left(-\frac{14}{15}\ ;\ -\frac{2}{15}\ ;\ \frac{13}{3}\right)$.

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A

1. $\dfrac{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}}{6-\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}} = \dfrac{-2+4\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}} = \dfrac{-1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{(-1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \dfrac{-2+2+\mathrm{i}+4\mathrm{i}}{4+1} = \dfrac{5\mathrm{i}}{5} = \mathrm{i}.$

2. Le résultat précédent $\dfrac{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}} = \mathrm{i}$ équivaut à $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\mathrm{i} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, ce qui signifie que B est l'image de C dans le quart de tour direct de centre A : le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en A.
Remarque : on peut aussi en prenant le module et l'argument de i, montrer que AC = AB et que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Partie B

1. On a $z_{\mathrm{D}'} = \dfrac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i}-2+3\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}-\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(2\mathrm{i}-1)}{1-2\mathrm{i}} = \dfrac{-\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})}{1-2\mathrm{i}} = -\mathrm{i}.$

2. a. Il faut résoudre dans $\mathbb{C}-\{\mathrm{i}\}$, l'équation :
$z' = 2\mathrm{i} \iff \dfrac{\mathrm{i}(z-2+3\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = 2\mathrm{i} \iff \dfrac{z-2+3\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = 2 \iff$
$z-2+3\mathrm{i} = 2(z-\mathrm{i}) \iff -2+3\mathrm{i}+2\mathrm{i} = z \iff z = -2+5\mathrm{i}$. Donc $z_\mathrm{E} = -2+5\mathrm{i}$.

b. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AE}}$ est $-2+5\text{i}-2+3\text{i} = -4+8\text{i}$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ est $\text{i}-2+3\text{i} = -2+4\text{i}$.
On a la relation de colinéarité : $\overrightarrow{\text{AE}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}$, donc les points A, B et E sont alignés (on peut même plus précisément dire que E est le symétrique de A autour de B.

3. Pour $z \neq \text{i}$, on a : $z' = \dfrac{\text{i}(z-2+3\text{i})}{z-\text{i}} \iff z' = \dfrac{\text{i}(z-z_{\text{A}})}{z-z_{\text{B}}}$ (1), d'où en prenant les modules des deux membres $\text{O}M' = \dfrac{\text{A}M}{\text{B}M}$ avec $z \neq \text{i}$ ou encore M distinct de B.

4. De même en prenant les arguments des deux membres de l'équation (1), on obtient :

$$\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{B}M},\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

5. Si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors $\text{A}M = \text{B}M$; le résultat de la question 3. donne alors :
$\text{O}M' = 1 \iff M'$ appartient au cercle unitaire de centre O et de rayon 1.

6. Si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et en utilisant le résultat de la question 4. on a alors :
$\dfrac{\pi}{2} = \left(\overrightarrow{\text{B}M},\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près $\iff \left(\overrightarrow{\text{B}M},\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) = 0$ à 2π près, ce qui signifie que les points A, B et M sont alignés.
Inversement ceci montre que l'image de la droite (AB) par f est l'axe des imaginaires privé du point B.

EXERCICE 4 — 6 points

Partie A Question de cours
Partie B

Les courbes sont tracées en annexe.

1. a. On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f(x) = g(x) \iff (x-1)^2\text{e}^{-x} = \frac{3}{2}(x-1)^2 \iff (x-1)^2\left[\text{e}^{-x} - \frac{3}{2}\right] = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} (x-1)^2 &=& 0\\ \text{e}^{-x} - \dfrac{3}{2} &=& 0\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ -x &=& \ln\left(\frac{3}{2}\right)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ x &=& \ln\left(\frac{2}{3}\right)\end{array}\right.$$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont donc deux points communs de cordonnées $(1\,;\,0)$ et $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\,;\,\frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)-1\right)^2\right)$.

b. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$d(x) = f(x) - g(x) = (x-1)^2\text{e}^{-x} - \dfrac{3}{2}(x-1)^2 = (x-1)^2\left[\text{e}^{-x} - \dfrac{3}{2}\right]$.
Exception faite de $d(1) = 0$, le signe de d est celui de la différence $\text{e}^{-x} - \dfrac{3}{2}$.
Or $\text{e}^{-x} - \dfrac{3}{2} > 0 \iff \text{e}^{-x} > \dfrac{3}{2} \iff -x > \ln\frac{3}{2} \iff x < -\ln\frac{3}{2} \iff x < \ln\frac{2}{3}$.
Conclusion : $\mathcal{C}_1$ est au dessus de $\mathcal{C}_2$ sur $\left]-\infty\,;\,\ln\frac{2}{3}\right[$; on trouve de même que $\mathcal{C}_1$ est au dessous de $\mathcal{C}_2$ sur $\left]\ln\frac{2}{3}\,;\,\infty\right[$.
On a vu dans la question précédente que les deux courbes ont deux points communs.

2. a. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 (x-1)^2\text{e}^{-x}\,\text{d}x$:

Soit $\left\{\begin{array}{rcl} u(x) &=& (x-1)^2\\ v'(x) &=& \text{e}^{-x}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) &=& 2(x-1)\\ v(x) &=& -\text{e}^{-x}\end{array}\right.$

Toutes les fonctions sont continues car dérivables sur $\mathbb{R}$; on peut donc intégrer par parties :

$I = \left[-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\right]_{0^1} - \displaystyle\int_0^1 2(x-1) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x =$

$\left[-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 2(x-1) \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

Soit $J = \displaystyle\int_0^1 2(x-1) \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et intégrons à nouveau par parties :

Soit $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & 2(x-1) \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2 \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$

Donc $J = [-2(x-1)\mathrm{e}^{-x}]_0^1 + 2\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-2(x-1)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \left[-2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \left[-2(x-1)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1.$

Finalement :

$I = \left[-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x} - 2(x-1)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \left[-\mathrm{e}^{-x}\left((x-1)^2 + 2(x-1) + 2\right)\right]_0^1 =$

$-\mathrm{e}^{-1} \times 2 + (1-2+2) = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}.$

b. On a vu à la question 1. b. que sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, $\mathcal{C}_1$ est au dessous de $\mathcal{C}_2$. L'aire cherchée est donc égale, en unités d'aire, à l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{3}{2}(x-1)^2 - (x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\right]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{2}(x-1)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{3(x-1)^3}{2}\right]_0^1 - I = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}$ (u.a.)

On a $\dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{2} \approx 0,24.$

On peut vérifier sur la figure ci-dessous que la partie hachurée mesure à peu près 24 carreaux sur l'unité qui fait 100 petits carreaux, soit effectivement 0,24.

Partie C

1. a. On sait que $0 \leqslant x \leqslant 1$, d'où $-1 \leqslant -x \leqslant 0$ et par croissance de la fonction exponentielle $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0}$ ou encore $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \quad (1)$.

Or $(x-1)^{2n} = \left[(x-1)^2\right]^n \geqslant 0$ puisque $(x-1)^2 \geqslant 0$.

Donc en multipliant chaque membre de l'encadrement (1) par le nombre positif $(x-1)^{2n}$, on obtient :

$\mathrm{e}^{-1}(x-1)^{2n} \leqslant \mathrm{e}^{-x}(x-1)^{2n} \leqslant 1 \times (x-1)^{2n} \quad (1)$ et finalement

$$0 \leqslant (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}.$$

b. Par intégration des trois fonctions de l'encadrement du **a.**, on obtient

$\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (x-1)^{2n}\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \iff 0 \leqslant u_n \leqslant -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \iff 0 \leqslant u_n \leqslant +\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}$ et finalement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

2. L'encadrement précédent et le fait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ montre par application du théorème des « gendarmes », que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

ANNEXE

EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie