Corrigé du baccalauréat S Polynésie 9 juin 2005

Exercice 1 **3 points**

1. A et B sont indépendants, donc $p(\text{A}\cap\text{B} = p(\text{A})\times p(\text{B}) = 0,02\times 0,1 = 0,002$.
   On a $p(\text{C}) = 1 - p(\text{A}\cup\text{B}) = 1 - \left[p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A}\cup\text{B})\right] = 1-0,02-0,1-0,002 = 0,882$.
2. On a $p(\text{avoir le défaut } a \text{ seul}) = 0,02 - 0002 = 0,018$.
   De même $p(\text{avoir le défaut } b \text{ seul}) = 0,1 - 0,002 = 0,098$.
   Donc $p(\text{D}) = 0,018 + 0,098 = 0,116$.
3. On a une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,882$.
   $p(\text{E}) = p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4}0,882^4\times 0,118 + \binom{5}{5}0,882^5 \approx 0,8908$ soit
   $p(\text{E}) \approx 0,891$ à 10^{-3} près.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. A$(3\,;1\,;3)$ et B$(-6\,;\,2\,;\,1)$. Si G est le barycentre du système $\{(\text{A},\ 4)\,;\,(\text{B},\ -1)\}$ (qui existe puisque $4-1\neq 0$) $\left\|4\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}}\right\| = 2 \iff \left\|3\overrightarrow{M\text{G}}\right\| = 2 \iff$
   $\text{G}M = \dfrac{2}{3}$. L'ensemble est donc une sphère de centre G de rayon $\dfrac{2}{3}$. Réponse **b.**
2. Soit $\left(x_\text{H}\,;\,y_\text{H}\,;\,z_\text{H}\right)$ les coordonnées du point H. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AH}}$ est colinéaire au vecteur normal au plan de coordonnées $(1\,;2\,;2)$. Il existe donc $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que :
   $\begin{cases} x_\text{H}-3 &= \alpha\\ y_\text{H}-1 &= 2\alpha\\ z_\text{H}-3 &= 3\alpha\end{cases}$ et comme $\text{H}\in\mathscr{P}$, on a $3+\alpha+2(1+2\alpha)+2(3+3\alpha) = 5 \iff$
   $\alpha = -\dfrac{2}{3}$.
   On a donc $\text{H}\left(\dfrac{7}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$. Réponse **c.**
3. On calcule la distance du point B au plan $\mathscr{P}$:
   $d(\text{B},\ \mathscr{P}) = \dfrac{|-6+4+2-5|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{5}{3}$. Cette distance étant supérieure au rayon 1 la sphère et le plan ne sont pas sécants. Réponse **c.**.
4. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont respectivement pour vecteurs directeurs $(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $(2\,;1\,;1)$. Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
   La droite $\mathscr{D}$ a pour équations paramétriques $\begin{cases} x &= 3+t'\\ y &= 1+2t'\\ z &= 3-t'\end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$. Les droites sont sécantes s'il existe t ett' tels que : $\begin{cases} 3+2t &= 3+t'\\ 3+t &= 1+2t'\\ t &= 3-t'\end{cases} \iff$
   $\begin{cases} 2t &= t'\\ 3 &= 4t'\\ t &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} t' &= 2\\ t' &= \frac{3}{4}\\ t &= 1\end{cases}$. Ce système n'admet pas de solution, donc les droites ne sont pas sécantes. Réponse **c.**
5. Les points équidistants de A et B est le plan médiateur de [AB] qui coupe [AB] en son milieu $\text{I}\left(-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}\,(-9\,;\,1\,;\,-2)$ est un vecteur normal

à ce plan et les points M de ce plan médiateur vérifient : $\overrightarrow{\mathrm{I}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \iff$ $-9\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+1\left(y-\dfrac{3}{2}\right)-2(z-2)=0 \iff -9x+yb-2z-11=0$. Réponse **b.**

On pouvait également partir de $M\mathrm{A}^2 = M\mathrm{B}^2$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On calcule $u_1 = 64$ $u_2 = 314$, $u_3 = 1564$, $u_4 = 7814$

On peut conjecturer que $u_{2k} = \ldots 14$ et $u_{2k+1} = \ldots 64$.

2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36 = u_n + 24u_n + 36$.

Or $24u_n + 36 \equiv 0 \quad [4]$, donc $u_{2n} \equiv u_n \quad [4]$.

On en déduit que $u_{2k} \equiv u_0 = 4\times 3+2$. Donc, pour tout naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \quad [4]$.

De même $u_{2k+1} \equiv u_1 = 64 = 4 \times 16$; donc $u_{2k+1} \equiv 0 \quad [4]$, pour tout naturel k.

3. Soit à démontrer la propriété : $2u_n = 5^{n+2} + 3$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. *Initialisation* : $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit un naturel n et supposons que l'on ait $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

Calculons $2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12 = 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12 = 5^{n+3} + 3$.

La relation est donc vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n quelconque, elle l'est aussi au rang $n+1$. On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. On a $2u_n = 5^{n+2} + 3 = 5^2 \times 5^n + 3 = 25 \times 5^n + 28 - 25 = 25\,(5^n - 1) + 28$.

Or $5^n - 1$ est divisible par $5 - 1 = 4$ (en général $x^n - 1$ est divisible par $x - 1$).

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5^n - 1 = 4k$ et finalement :

$2u_n = 100k + 28 \iff 2u_n \equiv 28 \quad [100]$.

Autre méthode (non suggérée par l'énoncé)

Soit la propriété P_n : $\quad 5^{n+2} \equiv 25$ [100] ; démontrons-la par récurrence.

Initialisation : $5^2 \equiv 25$ [100], donc P_0 est vraie.

Hérédité : soit n un naturel quelconque et supposons que $5^{n+2} \equiv 25$ [100].

Alors on a $5^{n+3} = 5 \times 5^{n+2} \equiv 5 \times 25 \equiv 125 \equiv 25$ [100].

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$, donc d'après le principe de récurrence, on a pour tout naturel n, $5^{n+2} \equiv 25$ [100].

On en déduit que $5^{n+2} + 3 \equiv 28$ [100], d'où d'après la question 3. a. :

$$2u_n \equiv 28 \ [100].$$

4. Le résultat précédent signifie que le reste de la division de $2u_n$ par 100 sont 28. Il en résulte que les deux derniers chiffres de l'écriture de u_n sont 14 ou 64.

• Si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, d'après la question 2. : $u_n \equiv 2$ [4].

Or les deux derniers chiffres de u_n ne peuvent être 64, puisque $64 \equiv 0$ [4], donc les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_{2p} sont 14.

• Si $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, on a $u_{2p+1} \equiv 0$ [4].

Or dans ce cas les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_{2p+1} ne peuvent être 14 puisque $14 \equiv 2$ [4].

Donc les deux derniers chiffres de u_{2p+1} sont 64.

La conjecture de la question 1 est démontrée.

5. On utilise plusieurs fois la propriété : PGCD$(a\ ;\ b) = \text{PGCD}(a\ ;\ a-b)$ si $a \geqslant b$.
Donc PGCD$(u_{n+1}\ ;\ u_n) = \text{PGCD}(5u_n - 6\ ;\ u_n) = \cdots = \text{PGCD}(u_n - 6\ ;\ u_n) = \text{PGCD}(u_n\ ;\ 6) \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\}$.
Or 6 et 3 ne divisent pas u_0, mais tous les termes sont pairs.
Conclusion : PGCD$(u_{n+1}\ ;\ u_n) = 2$.

Exercice 3 **7 points**

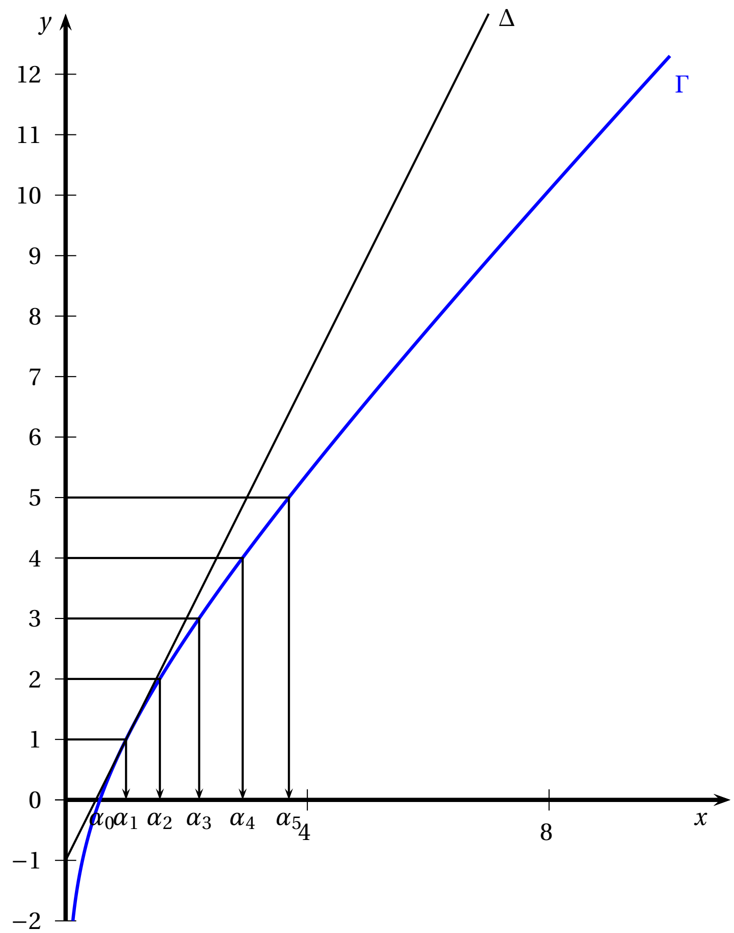
Partie A

1. **a.** On a de façon évidente $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1 > 0$. La fonction est donc croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** La fonction f est continue et croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$; de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc pour tout naturel n, il existe un unique antécédent α_n tel que $f(\alpha_n) = n$.

   b. Figure



   c. On a $\alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$. Le graphe fait apparaître la solution évidente $\alpha_1 = 1$.

   d. De $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1} = n+1$ on déduit par différence $f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n) = 1 > 0$ qui est équivalent par la croissance de f à $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0 \iff \alpha_{n+1} > \alpha_n$ qui démontre que la suite (α_n) est croissante.

3. **a.** $M(x\,;\,y) \in \Delta \iff \dfrac{y-1}{x-1} = f'(1) = 2 \iff y = 2x-1$ (pour $x \neq 1$).

   b. $h(x) = \ln x - x + 1\,;\; h'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$ qui est du signe de $1-x$. La fonction est donc croissante sur $]0\,;\,1]$, puis décroissante. Elle présente donc un maximum pour $x = 1$ et $h(1) = 0$.

   Conclusion : la fonction h est négative sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Or $h(x) = x + \ln x - (2x-1)$, donc $h(x) \leqslant 0 \iff x + \ln x \leqslant 2x-1$, ce qui signifie que pour tout réel positif, la courbe Γ est en dessous de Δ.

   c. Cf. figure.

4. Pour tout naturel n on a d'après la question précédente :

   $\ln\alpha_n + \alpha_n - 2\alpha_n + 1 \leqslant 0 \iff n - 2\alpha_n + 1 \leqslant 0 \iff \dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n.$

   On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$, donc par comparaison $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

Partie B

1. **Démonstration de cours : suite croissante non majorée**

   Soit M un réel fixé ; la suite (u_n) étant non majorée, il existe un naturel n_0 tel que $u_{n_0} > M$ et par croissance de la suite $n > n_0 \Longrightarrow u_n > u_{n_0} > M$.

   Cette propriété étant vraie pour tout réel M, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

2. Si la suite (β_n) est majorée, étant croissante elle converge vers un réel ℓ. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \ell$, mais par continuité de la fonction g, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(\beta_n) = g(\ell)$. Or $g(\beta_n) = n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n = g(\ell) = +\infty$, ce qui est contradictoire.

   Conclusion : la suite (β_n) non majorée et croissante tend vers plus l'infini d'après la question **1.**

Exercice 4 **5 points**

1. $z^3 = 8 \iff z^3 = 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} \iff z = 2\mathrm{e}^{2\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \quad \bmod 2\dfrac{\mathrm{i}\pi}{3}$.

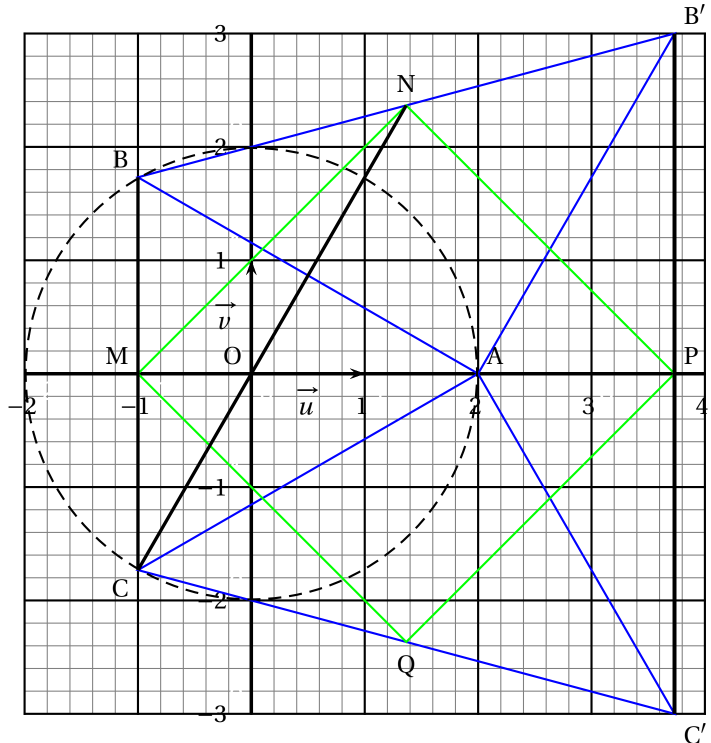
   Il y a donc trois solutions : $z_1 = 2\mathrm{e}^{2\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$;

   $z_2 = 2\mathrm{e}^{4\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$;

   $z_3 = 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 2$.

   $S = \left\{2\,;\,-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\,;\,-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

2. **a.** Figure



b. On place B et C sur le cercle de centre A et de rayon 2, respectivement avec un argument de $\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{2\pi}{3}$. B′ et C′ se construisent avec les triangles rectangles ABB′ (indirect) et ACC′ (direct).

c. La rotation r est définie par $z' - 2 = \mathrm{i}(z-2)$, donc $z_{\mathrm{C}'} = 2 + \mathrm{i}(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$.

d. De même la rotation r' est définie par
$z' - 2 = -\mathrm{i}(z-2)$, donc $z_{\mathrm{B}'} = 2 - \mathrm{i}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.
Donc b' et c' sont bien conjuguées.

Géométriquement : les points B et C sont symétriques autour de (Ox) ; par des considérations d'angles, leurs images par les deux rotations sont elles aussi symétriques autour de (Ox).

3. a. $n = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

b. On constate que $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ce qui signifie que les vecteurs sont colinéaires, donc que les points O, N et C sont alignés.

c. Calcul de $q = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 3\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$.
Remarque : géométriquement Les segments [BB′] et [CC′] étant symétriques autour de (Ox), leurs milieux le sont aussi, donc $q = \overline{n}$.

$q+1$ étant différent de zéro, calculons $\dfrac{n+1}{q+1} = \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) + 1}{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) + 1} =$
$\dfrac{1 + 2 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}+3)\mathrm{i}}{1 + 2 + \sqrt{3} - (\sqrt{3}+3)\mathrm{i}} = \dfrac{3 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}+3)\mathrm{i}}{3 + \sqrt{3} - (\sqrt{3}+3)\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}[(\sqrt{3} + 3 - \mathrm{i}(3+\sqrt{3})]}{(\sqrt{3} + 3 - \mathrm{i}(3+\sqrt{3})} = \mathrm{i}$.
On a donc bien démontré que $n + 1 = \mathrm{i}(q+1)$.
Cette égalité s'écrit encore $n - (-1) = \mathrm{i}[q - (-1)]$ qui montre que N est l'image de Q dans la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; donc le triangle MQN est un triangle rectangle isocèle direct, donc MNQ un triangle rectangle isocèle indirect.

d. Dans le triangle BB′C, N est le milieu de [BB′] et M est le milieu de [BC], donc la droite (MN) est parallèle à la droite (B′C). De même la droite (PQ) est parallèle à la droite (B′C) et par transitivité, les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

On démontre de la même façon que les droites (NP) et (MQ) sont parallèles.

Conclusion : le quadrilatère (MNPQ) a ses côtés opposés parallèles (c'est un parallélogramme), ayant deux côtés consécutifs de même longueur MN = MQ (c'est un losange) et possède un angle droit (c'est donc un rectangle) et finalement un carré.