Corrigé du baccalauréat Polynésie 30 août 2022
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ sujet n° 1

EXERCICE 1 **7 points** **probabilités**

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

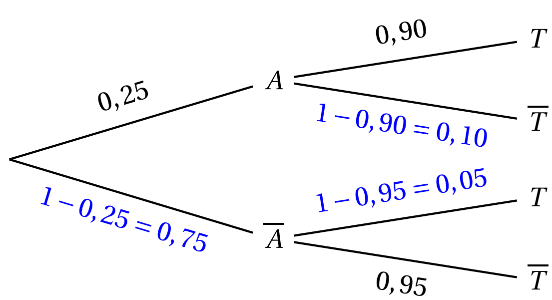
Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques »;
- T : « le test est positif »;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. On résume la situation par un arbre pondéré.



$P(A\cap T)=P(A)\times P_A(T)=0,25\times 0,90=0,225$

2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(T)=P(A\cap T)+P\left(\overline{A}\cap T\right)=0,225+0,75\times 0,05=0,2625$

3. On choisit un patient ayant un test positif. La probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques est :
$P_T(A)=\dfrac{P(A\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,225}{0,2625}\approx 0,8571$

4. **a.** Les évènements correspondant à un résultat erroné du test sont : $\overline{A}\cap T$ et $A\cap\overline{T}$.

   b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
   $P(E)=P\left(\overline{A}\cap T\right)+P\left(A\cap\overline{T}\right)=0,25\times 0,10+0,75\times 0,05=0,0625$

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés. On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

a. On a une répétition de 50 épreuves indépendantes et identiques n'ayant que deux issues et dont le succès a pour probabilité $p = 0{,}0625$; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,\, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.

b. $P(X = 7) = \dbinom{50}{7} \times 0{,}0625^7 \times (1 - 0{,}0625)^{50-7} \approx 0{,}0237$

c. La probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné est :

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dbinom{50}{0} \times 0{,}0625^0 \times (1 - 0{,}0625)^{50} \approx 0{,}9603$

2. On cherche la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à $0,95$.

$P(X \geqslant 10) > 0,95 \iff P(X < 10) \leqslant 0,05 \iff P(X \leqslant 9) \leqslant 0,05$

À la calculatrice, par essais successifs, on trouve :

- pour $n = 247$, $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}0514$;
- pour $n = 248$, $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}0498$.

Il faut donc un échantillon de taille au moins 248 pour que $P(X \geqslant 10) \geqslant 0,95$.

EXERCICE 2 7 points **suites, fonctions**

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = ku_n\,(1 - u_n)\,.$$

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$; on a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,9u_n\,(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0;\,1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.

a. On étudie les variations de f sur l'intervalle $[0;\,1]$.

$f'(x) = 1,9\,(1 - x) + 1,9x \times (-1) = 1,9 - 1,9x - 1,9x = 1,9\,(1 - 2x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x) = 1,9\,(1 - 2x)$		$+$	0	$-$	

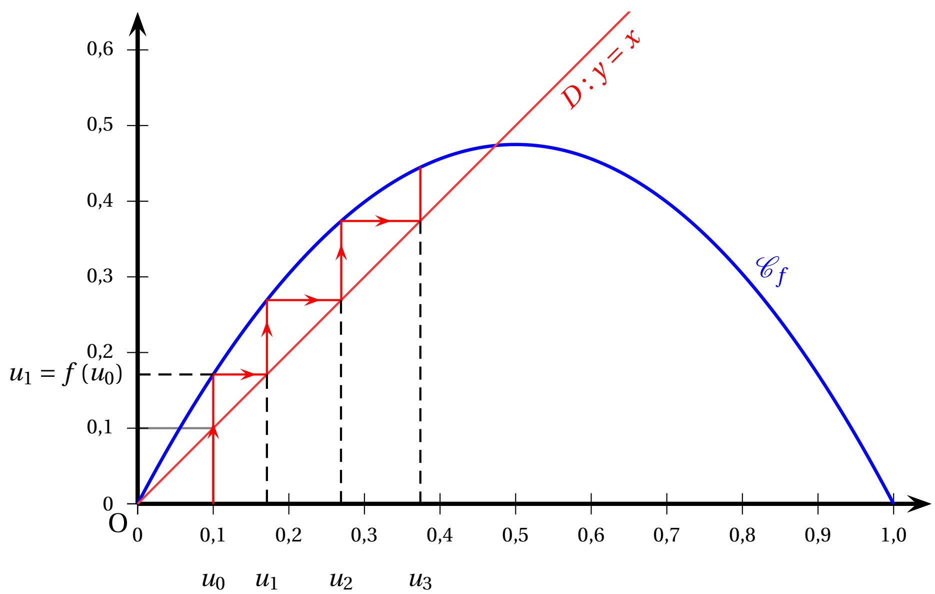
$f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,475$ et $f(1) = 0$

On établit le tableau des variations de f sur$[0\,;1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,475$	$\searrow$	0

b. On peut en déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,0,475]$ donc $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.



La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et D.

3. a. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 1,9u_0\,(1 - u_0) = 1,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,171$; donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

  La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$. C'est l'hypothèse de récurrence.

  La fonction f est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.

  $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,475 \leqslant \frac{1}{2}$

  On en déduit que : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire; donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

  On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

b. De la propriété précédente, on tire :

- pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante;
- pour tout n, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n).

Comme pour tout$n$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et que la fonction f est continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

On résout l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1,9x(1-x) = x \iff 1,9x(1-x) - x = 0 \\ &\iff x(1,9 - 1,9x - 1) = 0 \iff x(0,9 - 1,9x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0,9 - 1,9x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,9}{1,9} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante donc $\ell \geqslant u_0$ soit $\ell \geqslant 0,1$.

La seule solution possible est donc $\ell = \frac{0,9}{1,9} = \frac{9}{19} \approx 0,474$.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$, donc, pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite géométrique (v_n) définie pour tout n par $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente vers 0.

   Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
      u = 1/2*u*(1 - u)
      n = n+1
  return(n)
```

   La boucle s'arrête quand `u` est inférieur ou égal à `10**(-p)`, c'est-à-dire pour la première valeur de n vérifiant $u_n \leqslant 10^{-p}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il y a une première valeur n_0 à partir de laquelle $u_n \leqslant 10^{-p}$ pour tout $n \geqslant n_0$. La boucle `while` ne tourne donc pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

EXERCICE 3 7 points **fonctions**

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

1. On note g' la dérivée de g. On a : $g'(x) = \dfrac{2\dfrac{1}{x}\times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{2-2\ln x}{x^2}$
2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\text{e}}$	$\searrow$	0

   a. La valeur $\dfrac{2}{\text{e}}$ est l'image de e par f : $f(\text{e}) = \dfrac{2\ln \text{e}}{\text{e}} = \dfrac{2}{\text{e}}$.

   b. $g'(x) = \dfrac{2-2\ln x}{x^2}$ donc $g'(x)$ est du signe de $2-2\ln x = 2(1-\ln x)$.

   - Sur $]0\,;\,\text{e}[$, $\ln x < 1$ donc $1-\ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
   - Sur $]\,\text{e}\,;+\infty[$, $\ln x > 1$ donc $1-\ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

   c. On justifie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

   - $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

     Donc, par produit de limites, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x \times \frac{1}{x} = -\infty$.
   - D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = [\ln(x)]^2$.

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. $[(u(x)^2]' = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x = \dfrac{2\ln x}{x} = g(x)$

   Donc sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. **a.** On étudie la convexité de la fonction f.

D'après les questions précédentes, la fonction g, dérivée de la fonction f, est croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

De même, la fonction g, dérivée de la fonction f, est décroissante sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

De plus, la fonction g donc la fonction f', change de sens de variation en $x = \mathrm{e}$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$.

b. On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f' = g$.

Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la fonction g est négative donc f' est négative ; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive ; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 1$.

3. **a.** Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est : $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$. On a : $f'(\mathrm{e}) = g(\mathrm{e}) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$; $f(\mathrm{e}) = (\ln \mathrm{e})^2 = 1$

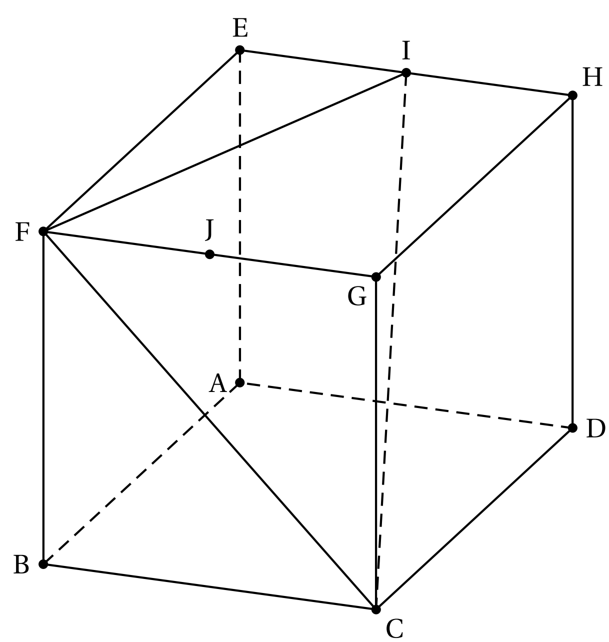
L'équation devient : $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$ soit $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 2 + 1$ c'est-à-dire $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.

b. La courbe représentant f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$ donc la tangente en ce point coupe la courbe ; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.

On en déduit que sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, on a : $[\ln(x)]^2 \geqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.

EXERCICE 4 7 points **géométrie dans le plan et dans l'espace**

On considère le cube ABCDEFGH. On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ dans ce repère.



1. **a.** Les coordonnées des points C, F et G sont : C$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et G$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{\text{CF}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{CF}} = 1\times 0+2\times(-1)+2\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{CF}}$
- $\overrightarrow{\text{CI}}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{CI}} = 1\times(-1)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{CI}}$
- Les points C, F et I ne sont pas alignés donc ces trois points forment le plan (CFI) dont $\overrightarrow{\text{CF}}$ et $\overrightarrow{\text{CI}}$ sont deux vecteurs directeurs.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (CFI) donc il est normal au plan (CFI).

c. D'après la question précédente, le plan (CFI) a une équation de la forme $x+2y+2z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.
C $\in$ (CFI) donc $x_{\text{C}}+2y_{\text{C}}+2z_{\text{C}}+d=0$ soit $1+2\times1+2\times0+d=0$ donc $d=-3$.
Une équation cartésienne du plan (CFI) est donc : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. La droite d est orthogonale au plan (CFI) ; elle a donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur. De plus elle passe par le point G. C'est donc l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\text{GM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{GM}} = t.\overrightarrow{n}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{\text{GM}} = t.\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\\ y-1 &=& 2t\\ z-1 &=& 2t\end{array}\right.$$

La droite d a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$

b. La droite d est orthogonale au plan (CFI) donc le projeté orthogonal K du point G de la droite d sur le plan (CFI), est le point d'intersection de d et de (CFI) ; donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+2t\\ x+2y+2z-3 &=& 0\end{array}\right.$

On a donc : $(1+t)+2(1+2t)+2(1+2t)-3=0$, ce qui donne :
$1+t+2+4t+2+4t-3=0$ soit $9t=-2$ donc $t=-\frac{2}{9}$.

$$\left\{\begin{array}{rcccccl} x &=& 1+t &=& 1-\frac{2}{9} &=& \frac{7}{9}\\ y &=& 1+2t &=& 1-2\times\frac{2}{9} &=& \frac{5}{9}\\ z &=& 1+2t &=& 1-2\times\frac{2}{9} &=& \frac{5}{9}\end{array}\right.$$

Donc le projeté orthogonal K du point G sur le plan (CFI) a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\,;\dfrac{5}{9}\,;\dfrac{5}{9}\right)$.

c. La distance du point G au plan (CFI) est :

$$\text{GK} = \sqrt{(x_{\text{K}}-x_{\text{G}})^2+(y_{\text{K}}-y_{\text{G}})^2+(z_{\text{K}}-z_{\text{G}})^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

3. On considère la pyramide GCFI.

a. Si on considère que I est le sommet de la pyramide, la base en est le triangle GFC rectangle en G.

Le projeté orthogonal de I sur le plan (GFC) est le point J, milieu de [FG], et IJ = 1 donc la hauteur h vaut 1.

Le triangle GFC a pour aire $\dfrac{\text{GF}\times\text{GC}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

La pyramide GCFI a donc pour volume, en unité de volume : $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{6}$.

b. Appelons $\mathscr{A}$ l'aire du triangle CFI.

Si on considère que G est le sommet de la pyramide, la base en est le triangle CFI d'aire $\mathscr{A}$.

Le projeté orthogonal de G sur le plan (CFI) est le point K, donc la hauteur h vaut GK soit $\dfrac{2}{3}$.

La pyramide GCFI a donc pour volume : $\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{2\mathscr{A}}{9}$.

Or le volume de la pyramide vaut $\dfrac{1}{6}$, donc $\dfrac{2\mathscr{A}}{9} = \dfrac{1}{6}$ donc $\mathscr{A} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

L'aire du triangle CFI est, en unité d'aire, égale à $\dfrac{3}{4}$.