

## ∞ Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry 16 avril 2015 ∞

### Exercice 1

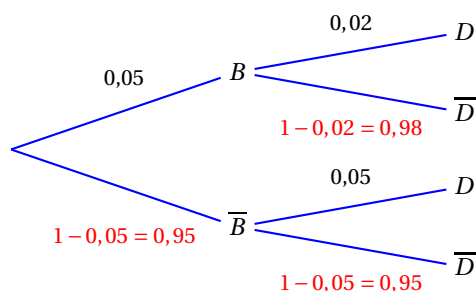
5 points

Commun à tous les candidats

#### Partie A

On appelle •  $B$  l'événement « la batterie est défectueuse » ;  
 •  $D$  l'événement « le disque dur est défectueux ».

On représente la situation décrite dans le texte par un arbre pondéré :



#### Proposition 1 – Fausse

La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à 0,08 à 0,01 près.

L'événement « le micro n'a ni problème de batterie ni problème de disque dur » est  $\overline{B} \cap \overline{D}$ .

D'après l'arbre :  $P(\overline{B} \cap \overline{D}) = P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(\overline{D}) = 0,95 \times 0,95 = 0,9025 \neq 0,08$

#### Proposition 2 – Vraie

La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,0485.

On cherche  $P(D)$ . D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(B \cap D) + P(\overline{B} \cap D) = 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,05 = 0,0010 + 0,0475 = 0,0485$$

#### Proposition 3 – Fausse

Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à 0,02.

On cherche  $P_D(B)$  :  $P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,05 \times 0,02}{0,0485} \approx 0,0206 > 0,02$

#### Partie B

#### Proposition 4 – Vraie

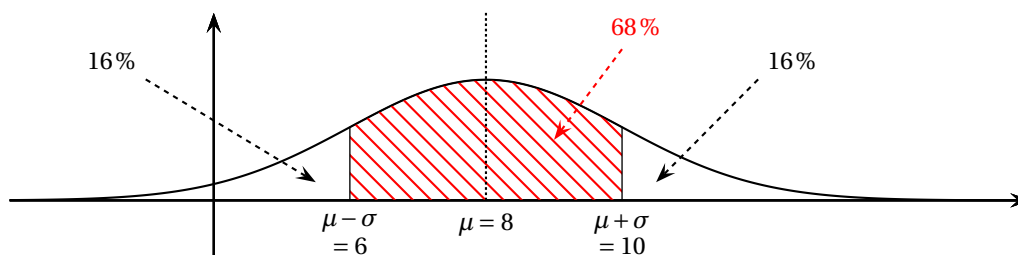
La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à 0,2.

La variable aléatoire  $X$  qui donne l'autonomie de la batterie suit la loi normale d'espérance  $\mu = 8$  et d'écart type  $\sigma = 2$ . On cherche  $P(X \geq 10)$ .

$\mu = 8$  et  $\sigma = 2$  donc  $10 = \mu + \sigma$ .

D'après le cours, on sait que  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$  et pour des raisons de symétrie par rapport à la droite d'équation  $x = \mu$ , on peut déduire que  $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma) \approx \frac{1 - 0,68}{2} \approx 0,16$ .

Donc  $P(X \geq 10) \approx 0,16 < 0,2$ .



**Partie C****Proposition 5 – Fausse**

Ce test, réalisé sur ces 1 000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

Pour une proportion  $p$  et un échantillon de taille  $n$ , l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a  $p = 0,98$  et  $n = 1 000$ .

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique  $I$  au seuil de 95 % donnant le pourcentage de clés USB conformes dans un échantillon de taille 1 000 est :

$$I = \left[ 0,98 - 1,96 \frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1000}} ; 0,98 + 1,96 \frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0,97 ; 0,99]$$

Sur 1 000 clés, il y en a 50 de défectueuses donc la fréquence de clés conformes dans ce lot est

$f = \frac{1000 - 50}{1000} = 0,95$ . Or  $f \notin I$ , donc il faut remettre en question la communication de l'entreprise.

**Exercice 2****5 points****Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L**

1. a. On recopie et on complète le tableau correspondant à l'algorithme donné dans le texte :

<b>Test <math>C &lt; 400</math></b>		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
<b>Valeur de <math>C</math></b>	300	326	350	372	392	411	
<b>Valeur de <math>n</math></b>	0	1	2	3	4	5	

- b. La valeur affichée en sortie d'algorithme est 5. Cela veut dire que pour l'année 5, c'est-à-dire en 2019, le nombre de colonies dépasse pour la première fois 400.
2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite  $(C_n)$  le terme  $C_n$  donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année 2014 +  $n$ .  
Ainsi  $C_0 = 300$  est le nombre de colonies en 2014.
- a. D'une année sur l'autre, l'apiculteur perd 8 % de colonies donc il en reste 92 %. De plus, il installe 50 nouvelles colonies chaque printemps donc le nombre de colonies l'année  $n + 1$  est le nombre de colonies l'année  $n$  multiplié par 0,92 auquel on va ajouter 50 :  
pour tout  $n$ ,  $C_{n+1} = 0,92 \times C_n + 50$
- b. On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier  $n$  par  $V_n = 625 - C_n$  ; donc  
 $C_n = 625 - V_n$ .  
 $V_{n+1} = 625 - C_{n+1} = 625 - 0,92 \times C_n - 50 = 575 - 0,92 \times (625 - V_n) = 575 - 575 + 0,92 \times V_n = 0,92 \times V_n$
- c. D'après la question précédente, on peut déduire que la suite  $(V_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,92$  et de premier terme  $V_0 = 625 - C_0 = 325$ .  
Donc, pour tout  $n$ ,  $V_n = V_0 \times q^n = 325 \times 0,92^n$ .  
Comme  $C_n = 625 - V_n$ , on peut dire que, pour tout  $n$ ,  $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$ .
- d. Le mois de juillet 2024 correspond à  $n = 10$  ; l'apiculteur peut espérer posséder  $C_{10}$  colonies soit :  $C_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10} \approx 484$  colonies.
3. a. Pour doubler le nombre initial de colonies, il faut atteindre au moins 600 colonies ; il suffit donc de remplacer dans l'algorithme la ligne « Tant que  $C < 400$  faire » par la ligne « Tant que  $C < 600$  faire ».

b. On cherche une valeur de  $n$  pour laquelle  $C_n \geq 600$  :

$$C_n \geq 600 \iff 625 - 325 \times 0,92^n \geq 600 \iff 25 \geq 325 \times 0,92^n \iff \frac{25}{325} \geq 0,92^n$$

$$\iff \ln\left(\frac{25}{325}\right) \geq \ln(0,92^n) \iff \ln\left(\frac{25}{325}\right) \geq n \times \ln(0,92) \iff \frac{\ln\left(\frac{25}{325}\right)}{\ln(0,92)} \leq n$$

Or  $\frac{\ln\left(\frac{25}{325}\right)}{\ln(0,92)} \approx 30,8$  donc au bout de 31 années, le nombre de colonies aura doublé.

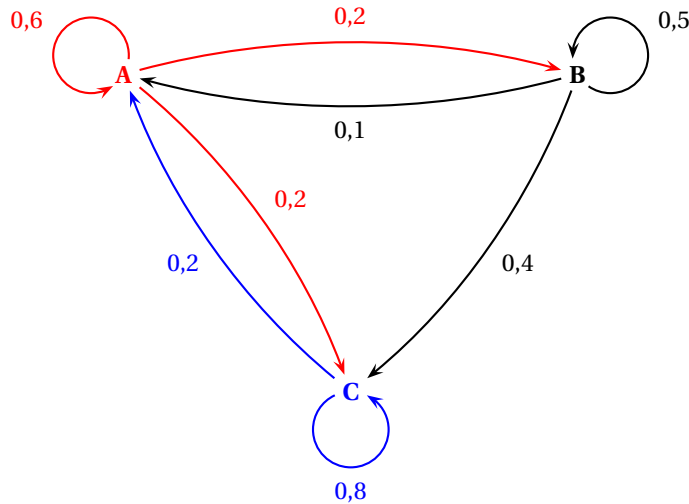
Vérification :  $C_{30} \approx 598$  et  $C_{31} \approx 600$

**Exercice 2**

**5 points**

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets A, B et C :



2. Si  $a_n, b_n$  et  $c_n$  sont respectivement les nombres de visiteurs sur les sites A, B et C à l'instant  $t = n$ , d'après le graphe, on aura :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1b_n + 0,2c_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,5b_n + 0c_n \\ c_{n+1} = 0,2a_n + 0,4b_n + 0,8c_n \end{cases} \iff (a_{n+1} \quad b_{n+1} \quad c_{n+1}) = (a_n \quad b_n \quad c_n) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de transition associée à ce graphe est :  $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$

On donne  $M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}$  et  $M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$ .

3.  $N_2 = N_1 \times M = N_0 \times M \times M = N_0 \times M^2 = (100 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} = (42 \quad 22 \quad 36)$

On peut donc dire que, lors de la deuxième minute, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

4.  $N_0 \times M^{20} = N_{20} \approx (100 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix} = (31,25 \quad 12,5 \quad 56,25)$

On peut conjecturer que l'état stable est  $(31,25 \quad 12,5 \quad 56,25)$ .

Ce que l'on peut vérifier simplement car  $(31,25 \quad 12,5 \quad 56,25) \times M = (31,25 \quad 12,5 \quad 56,25)$ .

À long terme, il y aura en moyenne 31,25 internautes connectés sur le site A, 12,5 sur le site B et 56,25 sur le site C.

5. À l'instant  $t = 0$ , le site C est infecté.

a. La probabilité de passer du site C au site A en une minute est de 0,2; la probabilité qu'à l'instant  $t = 1$  le site A soit infecté est donc égale à 0,2.

b. Pour qu'en deux minutes les trois sites soient infectés, il faut aller de C vers A puis vers B, ou de C vers B puis vers A.

C'est impossible d'aller de C vers B.

On va de C vers A avec une probabilité de 0,2 et de A vers B avec une probabilité de 0,2; on va donc de C vers A puis vers B avec une probabilité de  $0,2 \times 0,2 = 0,04$ .

La probabilité qu'à l'instant  $t = 2$  les trois sites soient infectés est donc égale à 0,04.

**Exercice 3**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

On s'intéresse à la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -2(x+2)e^{-x}$

**Partie A**

1.  $f(-1) = -2(-1+2)e^{-(-1)} = -2e \approx -5,44$

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

$$f'(x) = -2(1)e^{-x} - 2(x+2)(-1)e^{-x} = (-2 + 2x + 4)e^{-x} = 2(x+1)e^{-x}$$

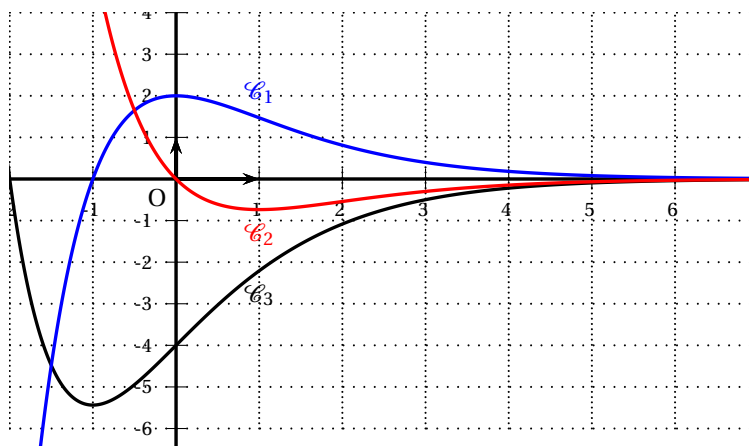
3. Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $x+1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Si  $x < -1$ ,  $f'(x) < 0$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; -1]$  ;
- Si  $x > -1$ ,  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[-1; +\infty[$  ;
- $f'(-1) = 0$  et  $f$  admet un minimum en  $-1$  égal à  $f(-1) = -2e$ .

**Partie B**

Dans le repère orthogonal ci-dessous, trois courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  ont été représentées.

L'une de ces courbes représente la fonction  $f$ , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.



On sait que sur un intervalle :  $f$  convexe  $\iff f'$  croissante  $\iff f''$  positive  
Il faut donc déterminer quelle fonction correspond à chacune des courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ .

- La seule courbe qui corresponde aux variations de la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}_3$ .

- La courbe  $\mathcal{C}_1$  correspond à une fonction négative sur  $] -\infty; -1[$  et positive sur  $] -1; +\infty[$ ; c'est donc la courbe représentative de la fonction  $f'$  car la fonction  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; -1[$  et croissante sur  $] -1; +\infty[$ .
- La courbe  $\mathcal{C}_2$  est donc la représentation graphique de la fonction  $f''$ .

Pour déterminer la convexité de la fonction  $f$ , il suffit de regarder le signe de la fonction  $f''$  :  $f'' > 0$  sur l'intervalle  $] -\infty; 0[$  donc la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $] -\infty; 0[$ .

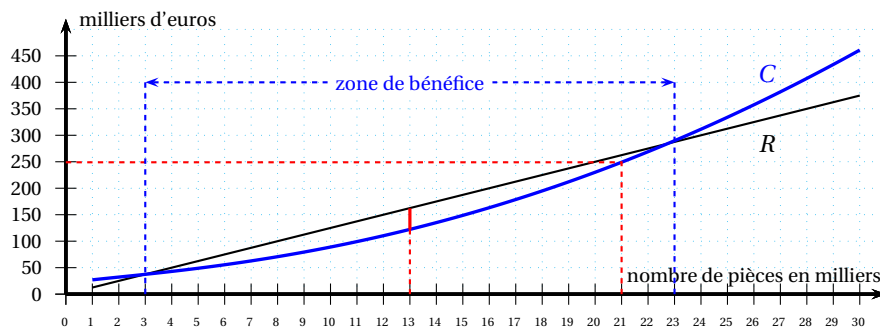
**Exercice 4**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

On donne ci-dessous  $R$  et  $C$  les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle  $[1; 30]$ .



1. On trouve le coût de production de 21 000 pièces en cherchant l'image du nombre 21 par la fonction  $C$  : le coût de production de 21 000 pièces est à peu près de 250 000 euros.
2. L'entreprise réalise un bénéfice quand la recette est supérieure au coût de production, c'est-à-dire quand la fonction  $R$  est située au dessus de la fonction  $C$  : l'entreprise réalise un bénéfice pour une quantité de pièces produites comprise entre 3 000 et 23 000.
3. L'entreprise réalise un bénéfice maximal quand, sur l'intervalle  $[3; 23]$ , l'écart entre la fonction  $R$  et la fonction  $C$  est le plus grand ; c'est autour de 13 donc le bénéfice est maximal pour une production de 13 000 pièces.

**Partie B**

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de  $x$  milliers de pièces, est donné sur l'intervalle  $[1; 30]$  par  $B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x \ln x$ .

1. La fonction  $B$  est dérivable sur  $[1; 30]$  et  

$$B'(x) = -0,5(2x) + 6 + 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = -x + 6 + 2 \ln x + 2 = -x + 8 + 2 \ln x$$
2. On admet que  $B''(x) = -1 + \frac{2}{x}$ , où  $B''$  est la dérivée seconde de  $B$  sur l'intervalle  $[1; 30]$ .

On donne le tableau de variations de la fonction dérivée  $B'$  :

$x$	1	2	30
$B'(x)$	7	$6 + 2 \ln 2$	$-22 + 2 \ln 30$

$B'(1) = -1 + 8 = 7$ ;  $B'(2) = -2 + 8 + 2 \ln 2 = 6 + 2 \ln 2 \approx 7,4 > 0$ ;

$B'(30) = -30 + 8 + 2 \ln 30 = -22 + 2 \ln 30 \approx -15,2 < 0$

- Sur  $[1; 2[$  :  $1 \leq x < 2 \iff \frac{1}{2} < \frac{1}{x} \leq 1 \iff 1 < \frac{2}{x} \leq 2 \iff 0 < -1 + \frac{2}{x} \leq 1 \implies B''(x) > 0$   
donc  $B'$  est strictement croissante.
- Sur  $]2; 30]$  :  $2 < x \leq 30 \iff \frac{1}{30} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \iff \frac{2}{30} \leq \frac{2}{x} < 1 \iff -1 + \frac{2}{x} \leq -1 + \frac{2}{x} < 0 \implies B''(x) < 0$  donc  $B'$  est strictement décroissante.
- En  $x = 2$ ,  $B''(x) = 0$ ; la fonction  $B''$  s'annule et change de signe donc la fonction  $B'$  admet un maximum égal à  $B'(2) = 6 + 2 \ln 2$ .

3. a. On a vu que  $B'(1) > 0$ ,  $B'(2) > 0$  et  $B'(30) < 0$ ; on complète le tableau de variations de  $B'$  :

$x$	1	2	$\alpha$	30
$B'(x)$		$6 + 2\ln 2$	0	$-22 + 2\ln 30$
	7			

On peut en déduire que l'équation  $B'(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[1 ; 30]$ , et que cette solution est dans l'intervalle  $]2 ; 30[$ .

- b. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve successivement :

- $B'(13) \approx 0,13 > 0$   
•  $B'(14) \approx -0,72 < 0$  }  $\Rightarrow \alpha \in [13; 14]$
- $B'(13,1) \approx 0,045 > 0$   
•  $B'(13,2) \approx -0,04 < 0$  }  $\Rightarrow \alpha \in [13,1; 13,2]$
- $B'(13,15) \approx 0,003 > 0$   
•  $B'(13,16) \approx -0,006 < 0$  }  $\Rightarrow \alpha \in [13,15; 13,16]$
- $B'(13,153) \approx 0,0003 > 0$   
•  $B'(13,154) \approx -0,0005 < 0$  }  $\Rightarrow \alpha \in [13,153; 13,154]$

Donc 13,153 est une valeur approchée de  $\alpha$  au millième.

On peut également utiliser le solveur de la calculatrice.

4. On peut déduire des questions précédentes que :

- $B'(x) > 0$  sur  $[1; \alpha[$
- $B'(x) < 0$  sur  $] \alpha; 30]$
- $B'(\alpha) = 0$

$$B(1) = -0,5 + 6 - 20 + 2\ln 1 = -14,5; B(30) = -0,5 \times 30^2 + 6 \times 30 - 20 + 2 \times 30 \times \ln 30 = -290 + 60\ln 30$$

D'où le tableau de variations de la fonction  $B$  :

$x$	1	$\alpha$	30
$B'(x)$		0	
		+	-
$B(x)$		$B(\alpha)$	
	$-14,5$		$-290 + 60\ln 30$

5. L'entreprise réalise un bénéfice maximal quand  $x = \alpha$  ce qui correspond à une production de 13 153 pièces, à l'unité près.

Ce bénéfice maximal vaut  $B(\alpha)$ .

Or  $\alpha \in [13,153; 13,154]$  et  $B(13,153) \approx 40,20$  et  $B(13,154) \approx 40,20$  milliers d'euros.

On peut donc dire que le bénéfice maximal, arrondi au millier d'euros, est de 40 000 €.