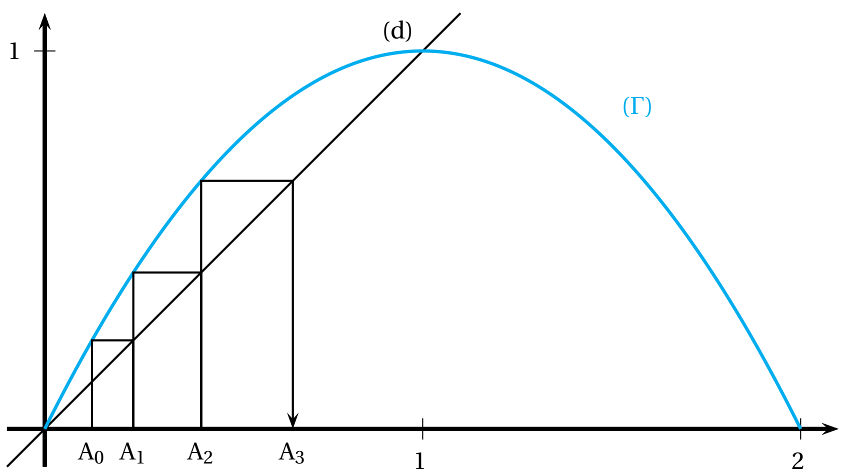
Corrigé du baccalauréat S Pondichéry avril 2003

Exercice 1 **4 points**

1. **a.** Ave $n = 0$, la relation de recurrence donne$u_1 = u_0(2 - u_0) = \dfrac{1}{8}\left(2 - \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{15}{8} = \dfrac{15}{64}$.

   Avec $n = 1$, on obtient : $u_2 = u_1(2 - u_1) = \dfrac{15}{64}\left(2 - \dfrac{15}{64}\right) = \dfrac{15}{64} \times \dfrac{113}{64} = \dfrac{1695}{4096}$.

   b.



   c. On part du point A_0 d'abscisse $u_0 = \dfrac{1}{8} = 0,125$, on va alternativement « vers » la courbe (Γ)(verticalement) puis vers la droite (d) (horizontalement) : les points de la droite et de la courbe ont successivement pour abscisses u_1, u_2, $u_3, \ldots$.

2. **a.** On a donc $0 < a < 1$:
   - la relation est donc vraie au rang 0 : $0 < a = u_0 < 1$;
   - Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que : $0 < u_p < 1$. On a vu que la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$, donc :

   $0 < u_p < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(u_p\right) < f(1)$ soit

   $0 < u_{p+1} < 1$.

   Si u_p appartient à $[0 ; 1]$, il en est de même pour u_{p+1}. L'hérédité est démontrée.

   On a donc bien démontré par récurrence que si $a \in [0 ; 1]$, alors $u_n \in [0 ; 1]$ quel que soit le naturel n.

   b. Calculons la différence $u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n = u_n(1 - u_n)$.

   Or on vient de démontrer que $u_n < 1 \iff 1 - u_n > 0$ et comme $u_n > 0$, on obtient par produit $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

   c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers un nombre $\ell \leqslant 1$.

3. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - u_n(2 - u_n) = 1 - 2u_n + u_n^2 = (1 - u_n)^2 = v_n^2$.

b. Pour $n=0$, on a $v_0 = 1 - u_0 = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

D'où $v_1 = v_0^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2$.

Puis $v_2 = v_1^2 = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^2\right]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^2}$.

On va montrer par récurrence que $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

- La relation est vraie au rang zéro (et un).
- Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $v_p = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^p}$.

Comme $v_{p+1} = v_p^2 = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^p}\right]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2\times 2^p} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^{p+1}}$. La relation est vraie au rang $p+1$.

c. On a donc pour tout naturel n, $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$. Comme $-1 < \dfrac{7}{8} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$ et a fortiori $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Comme $v_n = 1 - u_n \iff u_n = 1 - v_n$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

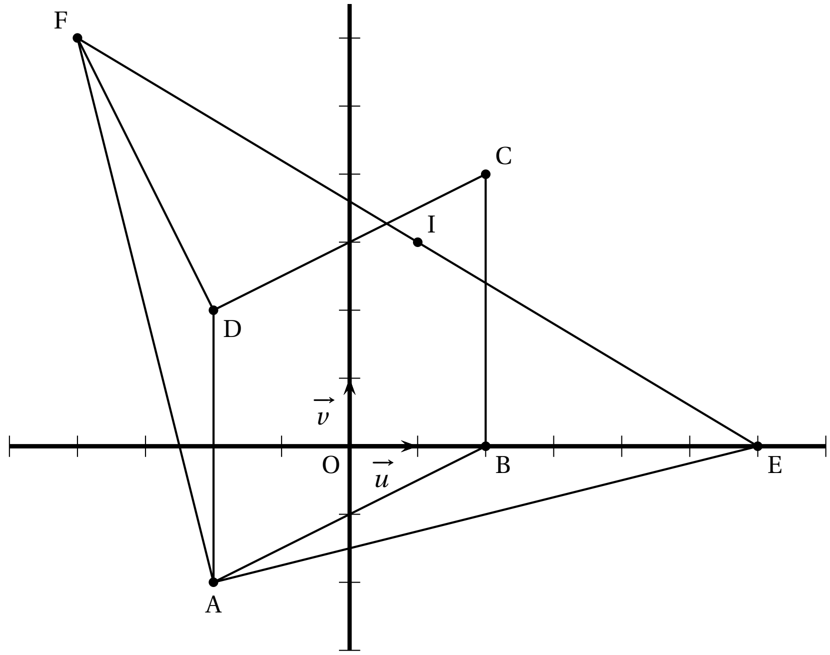
Première partie

1. On a : $2^3 + 2\times 2^2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$ qui signifie que 2 est solution de (E).
   Le polynôme est donc factorisable par $(z-2)$ et il existe donc trois réels a, b, c tels que :
   $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   En comparant les termes de plus haut degré on en déduit que $a = 1$; en comparant les termes constants on trouve que $c = 8$. On a donc :
   $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)\left(z^2 + bz + 8\right)$.
   En comparant les termes en z^2, on obtient : $2 = b - 2 \iff b = 4$.
   On a donc : $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)\left(z^2 + 4z + 8\right)$.
2. On a donc $(E) \iff (z-2)\left(z^2+4z+8\right) = 0 \iff$
   z - 2 = 0 ou $z^2 + 4z + 8 = 0$.
   On retrouve la solution 2 ; d'autre part :
   $z^2+4z+8 = 0 \iff (z+2)^2 - 4 + 8 = 0 \iff (z+2)^2 + 4 = 0 \iff (z+2)^2 - (2\text{i})^2 = 0 \iff (z+2+2\text{i})(z+2-2\text{i}) = 0 \iff$
   $\left\{\begin{array}{rcl} z+2+2\text{i} &=& 0\\ z+2-2\text{i} &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& -2-2\text{i}\\ z &=& -2+2\text{i}\end{array}\right.$
   Dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E) sont donc :
   $2 \quad ; \quad -2-2\text{i} \quad ; \quad -2+2\text{i}$.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. On reconnait les trois solutions précédentes.



2. ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff$
$z_B - z_A = z_C - z_D \iff z_C = z_B - z_A + z_D = 2 - (-2-2i) + (-2+2i) = 2+4i$.

3. **a.** L'écriture complexe de la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est :

$z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_B) = -i(z - z_B) \iff$
$z' = -iz + 2i + 2$.
L'image du point C est donc le point E tel que :
$z_E = -iz_C + 2i + 2 = -i(2+4i) + 2i + 2 = 6$.
De même l'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est :
$z' - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_D) = i(z - z_D) \iff z' = iz + 4i$.
L'image F du point C par cette rotation est donc tel que :
$z_F = i(2+4i) + 4i = -4+6i$

b. Voir la figure.

4. **a.** On calcule : $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \dfrac{-4+6i-(-2-2i}{6-(-2-2i} = \dfrac{-2+8i}{8+2i} = \dfrac{-1+4i}{4+i} = \dfrac{i(i+4)}{4+i} = i$
(car $i + 4 \neq 0$.

b. L'égalité précédente donne en prenant le module des deux nombres :
$\left|\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = |i|\right| \iff \dfrac{AF}{AE} = 1 \iff AF = AE$.
En prenant les arguments de deux mêmes complexes on obtient :
$\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad + 2k\pi$.
Conclusion : le triangle AEF est un triangle isocèle rectangle en B.

5. Dans le triangle isocèle rectangle en B, AEF, I est le pied de la médiane, de la hauteur, donc $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IE}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad + 2k\pi$ et IA = IE = IF, donc :

- l'image de A dans la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est le point F,

- l'image de E dans la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est le point A.

D'autre part l'image de la demi-droite [EB) par la rotation est la demi-droite d'origine A (image de E) et faisant un angle de $-\frac{\pi}{2}$ avec [EB) : c'est donc la demi-droite [AD) ; d'autre part la rotation conserve les longueurs donc l'image de B est le point A, car EB = AD = 4.

Conclusion : l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est le triangle ADF.

Rem. : pour trouver l'image du point B on aurait pu utiliser l'écriture complexe de la rotation.

PROBLÈME **11 points**

$$f(x) = x^2\text{e}^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Partie A : contrôle de la première conjecture

1. f somme de produits de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$et
$f'(x) = 2x\text{e}^{x-1} + x^2\text{e}^{x-1} - 2x \times \dfrac{1}{2} = x(x+2)\text{e}^{x-1} - x = x\left[(x+2)\text{e}^{x-1} - 1\right] = xg(x)$.

2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.

a. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{x-1} = \frac{1}{\text{e}} \lim_{x\to+\infty} \text{e}^x = +\infty$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$, par produit de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

$g(x) = x\text{e}^{x-1} + 2\text{e}^{x-1} - 1$.
Or $x\text{e}^{x-1} = \dfrac{1}{\text{e}}x\text{e}^x$; or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\text{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\text{e}}x\text{e}^x = 0$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{x-1} = 0$, par somme de limites, on obtient finalement :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1.$$

b. g est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x, on a :
$g'(x) = \text{e}^{x-1} + (x+2)\text{e}^{x-1} = (x+3)\text{e}^{x-1}$.
Quel que soit le réel x, $\text{e}^{x-1} > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $(x+3)$.

- $g'(x) > 0$ sur $]-3\ ;\ +\infty[$;
- $g'(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 3[$;
- $g'(-3) = 0$.

c. Du signe de la dérivée on déduit que g est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3[$ puis croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$. $g(-3)$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	↘	$-\text{e}^{-4}-1$	↗	$+\infty$

d. On a $g(1) = 2$. D'après l'étude des variations de g, sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$elle est croissante de $f(-3) < 0$ à $f(1) > 0$. Comme elle est continue sur cet intervalle il existe un réel unique $\alpha.in]-3\ ;\ 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne $g(0,20) \approx -0,011$ et $g(0,21) \approx 0,003$.
Pour les mêmes raisons on en déduit que $0,20 < \alpha < 0,21$.

e. D'après les deux questions précédentes on a donc :

- $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[$;
- $g(\alpha) = 0$;

- $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. On a vu que $f'(x) = xg(x)$. On peut donc dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Comme $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$ la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle et croissante ailleurs.

c. La première conjoncture est fausse puisque f n'est pas croissante sur $[-3\,;\,2]$.

Partie B : contrôle de la deuxième conjoncture

1. On sait que α vérifie $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-1}-1 = 0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-1} = 1 \iff \mathrm{e}^{\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha+2}$ (car $\alpha+2 \neq 0$).

On a donc $f(\alpha) = \alpha^2\mathrm{e}^{\alpha-1} - \dfrac{\alpha^2}{2} = \alpha^2 \times \dfrac{1}{\alpha+2} - \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha+2} - \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{2\alpha^2-(\alpha+2)\alpha^2}{2(\alpha+2)} = f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2. a. h quotient de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0\,;\,1]$, est dérivable et sur cet intervalle :

$h'(x) = \dfrac{-3x^2\times 2(x+2)+x^3\times 2}{4(x+2)^2} = \dfrac{-3x^3-6x^2+x^3}{2(x+2)^2} = \dfrac{-2x^3-6x^2}{2(x+2)^2} = -\dfrac{x^2(x+3)}{2(x+2)^2}$.

Comme sur $[0\,;\,1]$, $x^2 > 0$, $2(x+2) > 0$ et $(x+3) > 0$, on en déduit que $h'(x) < 0$: la fonction h est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$ et donc en particulier sur $[0{,}20\,;\,0{,}21]$.

b. On sait que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$ d'où par décroissance de la fonction h,

$h(0{,}20) > h(\alpha) > h(0{,}21)$.

La calculatrice livre $h(0{,}20) \approx -0{,}001\,8$ et $h(0{,}21) \approx -0{,}002\,1$, d'où

$-0{,}002\,1 < (\alpha) < -0{,}001\,8$.

3. a. Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, soit

$$x^2\left(\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{2}\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x^2 & = & 0 \\ \mathrm{e}^{x-1} & = & \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

On obtient d'une part la solution double $x = 0$ et $x-1 = \ln\frac{1}{2}$ par croissance de la fonction ln, soit $x = 1+\ln\frac{1}{2} = 1-\ln 2 \approx 0{,}31$.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$ sont donc $x = 0$ et $x = 1-\ln 2$.

b. La position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses est donnée par le signe de $f(x)$.

Comme $x^2 > 0$, quel que soit x le signe de $f(x)$ est celui de $\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{2}$.

La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses si et seulement si

$e^{x-1}-\frac{1}{2}>0 \iff e^{x-1}>\frac{1}{2} \iff x-1>\ln\frac{1}{2}$ (par croissance de la fonction ln) et enfin $x>1+\ln\frac{1}{2}$.

Conclusion : La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]1-\ln 2\,;\,+\infty[$, en dessous ailleurs sauf aux deux points de contact en $x=0$ et $x=1-\ln 2$.

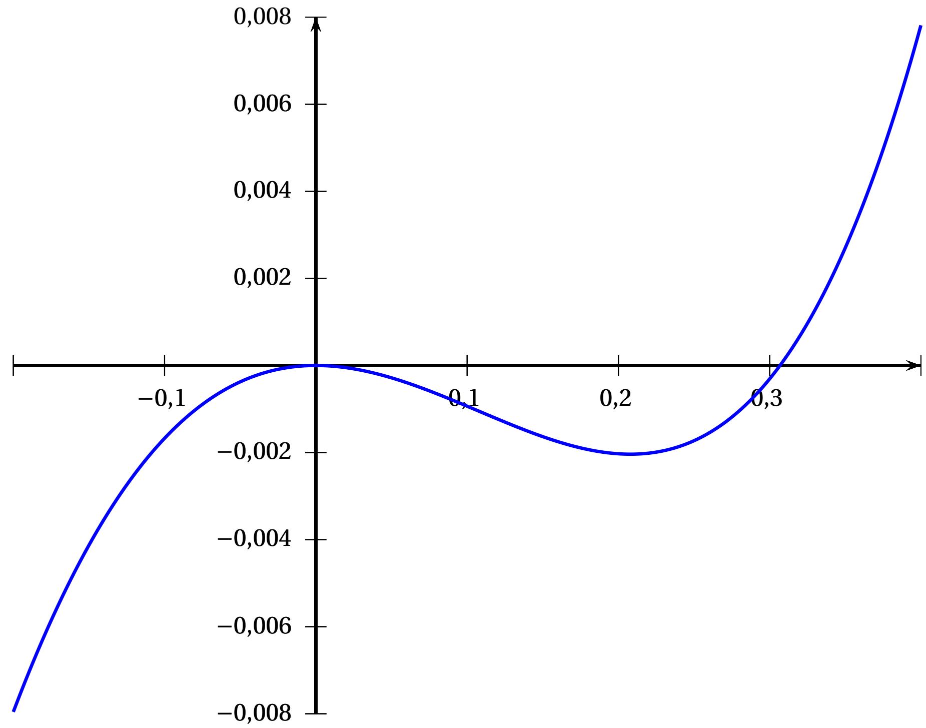
c. La deuxième conjecture est également fausse car $\mathscr{C}$ est au dessous de $(x'x)$ pour des réels x strictement positifs.

Partie C : tracé de la courbe

1.

x	$-0,2$	$-0,15$	$-0,1$	$-0,05$	0	$0,05$	$0,10$
$f(x)$	$-0,008$	$-0,0041$	$-0,0017$	$-0,0004$	0	$-0,003$	$-0,0009$
x	$0,15$	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,35$	$0,4$	
$f(x)$	$-0,0016$	$-0,002$	$-0,0017$	$-0,003$	$0,0027$	$0,0078$	

2.



Partie D : calcul d'aire

1. La fonction $x \longmapsto x^2e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$: elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

   On pose $u(t)=t^2$ et $v'(t)=e^t$;

   on a donc $u'(t)=2t$ et on choisit $v(t)=e^t$.

   Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut donc intégrer par parties :

   $P(t)=\left[t^2e^t\right]_0^x-\int_{0-}^{x}2te^t\,dt=x^2e^x-2\int_{0-}^{x}te^t\,dt.$

   On intègre à nouveau par parties en posant :

   $u_1(t)t,\ v_1'(t)=e^t$, d'où :

   $u_1'(t)=1,\ v_1(t)=e^t$.

   Toutes ces fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$P(t) = x^2\text{e}^x - 2\displaystyle\int_{0-}^{x} t\text{e}^t\,\text{d}t = \text{x}^2\text{e}^x - 2\left(\left[t\text{e}^t\right]_0^x - \displaystyle\int_{0-}^{x}\text{e}^t\,\text{d}t\right) = x^2\text{e}^x - 2x\text{e}^x + 2\text{e}^x - 2.$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2\text{e}^x$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \left(x^2 - 2x + 2\right)\text{e}^x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$ quelconque.

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)\text{e}^x - \dfrac{x^3}{6} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$ quelconque.

3. On a vu que sur $[0\ ;\ 1 - \ln 2]$ la courbe Γ est située au dessous de l'axe des abscisses. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ limitée par Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1 - \ln 2$ est donc égale, en unité d'aire à :

$\mathcal{A} = -\displaystyle\int_0^{1-\ln 2} f(x)\,\text{d}x = -[F(x)]_0^{1-\ln 2} = -F(1 - \ln 2) + F(0) =$

$-[(1 - \ln 2)^2 - 2(1 - \ln 2) + 2]\text{e}^{1-\ln 2-1} + \dfrac{1}{6}(1 - \ln 2)^3 + 2\text{e}^{-1} =$

$\mathcal{A} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{6}(\ln 2)^3 + \dfrac{2}{\text{e}}$ (u. a.).

Or en abscisse l'unité est de 20 cm et en ordonnées de 1 000 cm, donc l'unité d'aire est égale à 20 000 cm^2. On a donc

$$\mathcal{A} \approx 6,96\ \text{cm}^2.$$