Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry juin 2004 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

1. **a.** On a $u_0 = 0,\ u_1 = \dfrac{1}{2},\ u_2 = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$ et $u_3 = \dfrac{1}{2-\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

   b. On a de façon évidente : $w_0 = u_0,\ w_1 = u_1\ w_2 = u_2$ et $w_3 = u_3$.

   c. Initialisation : $w_0 = u_0$.

   Hérédité : On suppose que pour $n > 0,\ u_n = w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   On a par définition : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$.

   On a montré par récurrence que pour tout naturel $n,\ u_n = w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. La suite définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ est définie pour $n > 0$.

   a. On calcule la somme : $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} = \ln\dfrac{1\times 2\times 3}{2\times 3\times 4} = \ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4$.

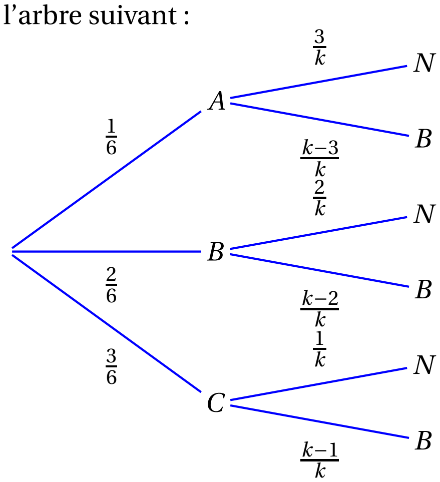
   b. On calcule de même $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \cdots + \ln\dfrac{n}{n+1} =$
   $\ln\dfrac{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}{2\times 3\times\cdots\times n\times(n+1)} = \ln\dfrac{1}{n+1} = -\ln(n+1)$.
   On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty.$$

EXERCICE 2 **4 points**

1. **a.** Il y a :
   - dans U_1 : 3 noires et $(k-3)$ blanche(s)
   - dans U_2 : 2 noires et $(k-2)$ blanche(s)
   - dans U_3 : 1 noire et $(k-1)$ blanche(s)

   Après une partie, on a l'arbre suivant :



   L'ensemble $\{A,\ B,\ C\}$ est un ensemble complet d'évènements ; on peut donc écrire en utilisant la formule des probabilités totales ;

$p(N) = p(A \cap N) + p(B \cap N) + p(C \cap N) = p(A) \times p_A(N) + p(B) \times p_B(N) + p(C) \times p_C(N) =$

$\dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{k} + \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{k} + \dfrac{3}{6} \times \dfrac{1}{k}$. Soit $\boxed{p(N) = \dfrac{5}{3k}}$

b. On vient de voir que $p(N) \neq 0$, donc

$$p_N(A) = \frac{p(A \cap N)}{p(N)} = \frac{p(A) \times p_A(N)}{p(N)} = \frac{\frac{1}{2k}}{\frac{5}{3k}} = \frac{3}{10}.$$

c. Si $k > 3$, $\dfrac{5}{3k} \geqslant \dfrac{1}{2} \iff k \leqslant \dfrac{10}{3}$.

Le seul entier vérifiant $3 \leqslant k \leqslant \dfrac{10}{3}$ est $\boxed{k = 3}$.

d. On a $\dfrac{5}{3k} = \dfrac{1}{30} \iff k = 50$

2. On a un schéma de Bernoulli avec une probabilité de $\dfrac{29}{30}$ et $n = 20$ parties.

L'évènement : « obtenir au moins une fois une boule noire » est l'évènement contraire de « ne jamais obtenir une noire ».

La probabilité cherchée est donc :

$$p = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} \approx 0,492.$$

EXERCICE 3 — 8 points

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. a. En écrivant $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - 1$ et comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$ pour n naturel, on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1.$$

De même, avec $x \neq 0$, $\varphi(x) = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-x} - 1$.

On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, on a finalement

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

b. φ est une somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\varphi'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(-x^2 + x\right) = \boxed{x(1-x)\mathrm{e}^{-x}}$.

On sait que $\mathrm{e}^{-x} > 0$: le signe de φ' est donc celui du trinôme $x(1-x)$ c'est-à-dire négatif sauf entre les racines 0 et 1. D'où la tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{\mathrm{e}}-1$	$\searrow$	-1

2. Une lecture immédiate donne $\varphi(0) = 0$. 0 est donc solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$ de l'équation $\varphi(x) = 0$.

   Sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty$, la fonction φ est

   — continue, car dérivable

   — décroissante de $\dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1 > 0$ à -1.

   Elle définit donc une bijection de $[1\ ;\ +\infty[$ sur $\left[-1\ ;\ \frac{3}{\mathrm{e}}-1\right]$. En particulier 0 a un unique antécédent α dans $[1\ ;\ +\infty[$.

   La calculatrice donne $\varphi(1,79) \approx 0,000\,78$ et $\varphi(1,8) \approx -0,001\,6$. On en déduit

$$\boxed{1,79 < \alpha < 1,80}$$

3. D'après la question précédente et le tableau de variations :
   - $\varphi(x) \geqslant 0$ si $x \in]-\infty\ ;\ \alpha]$
   - $\varphi(x) < 0$ si $x \in]\alpha\ ;\ +\infty]$

Partie B : étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives respectives des fonctions définies par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

1. Comme $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$, le point A$(0;\ 1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et à $\mathscr{C}_g$.

   Calcul du nombre dérivé en 0 :
   - $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)\mathrm{e}^{-x} = (1-2x)\mathrm{e}^{-x}$. Donc $f'(0) = 1$;
   - $g'(x) = \dfrac{2\left(x^2+x+1\right) - (2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$. Donc $g'(0) = 1$.

   Les deux courbes ont donc en A la même tangente : la droite d'équation

   $y = x+1$.

2. Étude de la différence $f(x) - g(x)$

   a. $f(x) - g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1)\dfrac{\left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2+x+1}$.

$$\text{Soit } f(x) - g(x) \quad \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

   b. On a $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geqslant \dfrac{3}{4} > 0$.

   Le signe de la différence étudiée est donc celui du produit $(2x+1)\varphi(x)$. On connait le signe de chaque facteur, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. Conclusion : la différence est négative, soit $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\mathscr{C}_g$, sauf sur l'intervalle $]\frac{1}{2}\ ;\ \alpha[$.

3. a. Primitive de $f(x)-g(x)$:

h définie par $h(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} - \ln\left(x^2+x+1\right)$ est la somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction $\ln\left(x^2+x+1\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a vu que $x^2+x+1>0$, quel que soit le réel x.

On a donc :

$h'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} - (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x)-g(x)$.

Donc h est bien une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x)-g(x)$.

b. D'après la question **2. c.** entre $-\frac{1}{2}$ et 0, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.

L'aire en unité d'aire de la surface limitée par les deux courbes et les droites d'équation $x=-\frac{1}{2}$ et $x=0$ est égale à l'intégrale

$$\mathscr{A} = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[f(x)-g(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

D'après la question précédente :

$$\mathscr{A} = [h(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} = h(0) - h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathscr{A} = -3 - \ln 1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + \ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right) = 2\sqrt{\mathrm{e}} + \ln\left(\frac{3}{4}\right) - 3 \approx 0{,}0098.$$

EXERCICE 4 obligatoire **5 points**

Partie A

1. Résolution de $z^2-2z+4=0$

$z^2-2z+4=0 \iff (z-1)^2-1+4=0 \iff (z-1)^2+3=0$

$\iff (z-1)^2-\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2=0 \iff (z-1+\mathrm{i}\sqrt{3})(z-1-\mathrm{i}\sqrt{3})=0.$

Les solutions sont donc les complexes : $z'=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z''=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Écriture exponentielle

$\left|z'\right|^2 = 1+3 = 2^2 \Rightarrow \left|z'\right| = 2.$

Donc $z' = 2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

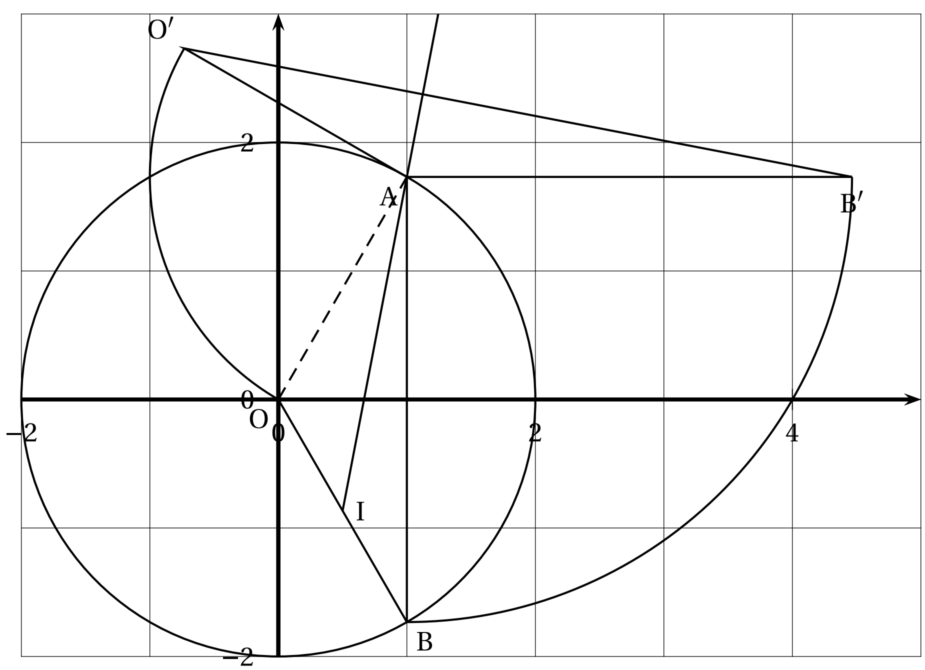
De même $z'' = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. En utilisant l'écriture exponentielle :

$\left(z'\right)^{2004} = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{2004} = 2^{2004}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2004\pi}{3}} = 2^{2004}\mathrm{e}^{\mathrm{i}668\pi} = 2^{2004}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\times 334} = 2^{2004}.$

Partie B

1. L'affixe de A est z' dont le module est égal à 2 ; donc OA = 2 ; de même l'affixe de B est z'' qui a le même module : donc OB = 2.
   Conclusion A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
2. L'écriture complexe de la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est $z' - z_A = -\mathrm{i}\,(z - z_A)$ soit $z' = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(z - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \mathrm{i}z + 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.
   On a donc $\boxed{z_{O'} = 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right).}$
   L'écriture complexe de la rotation r_2 de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est $z' - z_A = \mathrm{i}\,(z - z_A)$ soit $z' - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = \mathrm{i}\left(z - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ ou $z' = \mathrm{i}z + 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.
   Donc $z_{B'} = \mathrm{i}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) + 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 1 + 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
3. **a.** La droite (AI) semble être la hauteur issue de A dans le triangle O′AB′.
   b. I est le milieu de [OB], donc $z_I = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $z_{\overrightarrow{AI}} = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
   D'autre part $z_{\overrightarrow{O'B'}} = 1 + 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3}) - \left(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right) = 3\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   c. Le repère étant orthonormé on peut calculer :
   $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{O'B'} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 0$.
   Les vecteurs étant orthogonaux, les droites (AI) et (O′B′) sont perpendiculaires; donc la droite (AI) est bien hauteur dans le triangle O′AB′.



EXERCICE 4 spécialité **5 points**

1. On se place dans le plan $P_0 = yOz$ d'équation $x = 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées (5 ; −5) et $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées (5 ; 5).
   $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OA} = 25 - 25 = 0$.
   La droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

2. **a.** Équation du cône Γ

D'après la question précédente le triangle OAB est rectangle en A.

$\text{OA}^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc $\text{OA} = 5\sqrt{2}$.

$\text{AB}^2 = 0^2 + 5^2 + (10 - 5)^2 = 50$, donc $\text{AB} = 5\sqrt{2}$.

Le triangle OAB est donc rectangle isocèle et $\widehat{\text{AOB}} = \dfrac{\pi}{4}$.

L'équation du cône d'axe (Oz), et de sommet O est de la forme $x^2 + y^2 = z^2\tan^2\theta$, θ étant la mesure de l'angle formé par la génératrice (OA) et l'axe, soit ici $\dfrac{\pi}{4}$. Or $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$.

$\boxed{\text{L'équation de } \Gamma \text{ est donc } x^2 + y^2 = z^2.}$

b. D'après la première question la génératrice du cône est tangent au cercle qui génère la sphère : le cône est donc tangent à la sphère l'intersection est constitué par la rotation du point A autour de (Oz) ; c'est donc le cercle de centre le point C projeté de A sur (Oz) soit C(0 ; 0 ; 5) et de rayon CA = 5.

3. L'intersection d'un cône par un plan parallèle à l'axe de ce cône qui ne contient pas cet axe est une hyperbole.

4. Hypothèse : x et y sont des impairs ; il existe donc $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2p + 1$ et $y = 2q + 1$.

On a donc $z^2 = x^2 + y^2 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4p + 4q + 2 = 2\left[2p^2 + 2q^2 + 2p + 2q + 1\right] = 2\left[2\left(p^2 + q^2 + p + q\right) + 1\right]$.

$2\left(p^2 + q^2 + p + q\right) + 1$ est un nombre impair, donc z^2 est un multiple de 2 non multiple de 4 : ceci est impossible.

Conclusion : x et y ne peuvent être simultanément impairs.