Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 12 avril 2007

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(-2\,;\,0\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;\,-4\,;\,-1)$. Ils ne sont manifestement pas colinéaires. Conclusion : les trois points A, B et C définissent un plan.

   b. $A \in \mathcal{P} \iff 2\times3+2-2\times6+4=0$ est vrai;
   $B \in \mathcal{P} \iff 2\times1+2-2\times4+4=0$ est vrai;
   $C \in \mathcal{P} \iff 2\times4+(-2)-2\times5+4=0$ est vrai.
   Le plan $\mathcal{P}$ est donc bien le plan (ABC).

2. **a.** D'après 1., $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times1+0\times(-4)+(-2)\times(-1)=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux, les droites (AB) et (AC) perpendiculaires. Conclusion : le triangle ABC est rectangle en A.

   b. Le vecteur $\overrightarrow{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ est un vecteur normal au plan d'équation $ax+by+cz=d=0$. Ici le vecteur $\overrightarrow{n}(2\,;\,1\,;\,-2)$, vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est donc un vecteur directeur de la droite (Δ). Si $M\in(\Delta)$ alors $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{n}$. Cette égalité vectorielle se traduit par le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2\lambda\\ y &=& \lambda\\ z &=& -2\lambda\end{array}\right.,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

   c. Puisque $(KO)\perp\mathcal{P}$, $(KO)=\Delta$. Le point K est commun à (Δ) et à $\mathcal{P}$. En utilisant la question précédente, on a $2x_K+y_K-2z_K+4=0 \iff 2\times\lambda+\lambda-2\times(-2\lambda)+4=0 \iff 9\lambda+4=0 \iff \lambda=-\dfrac{4}{9}$.
   Conclusion : les coordonnées de K sont donc $\left(-\dfrac{8}{9}\,;\,-\dfrac{4}{9}\,;\,\dfrac{8}{9}\right)$.
   Donc $OK^2=\left(-\dfrac{8}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{8}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{8}{9}\right)^2=\dfrac{64}{81}+\dfrac{16}{81}+\dfrac{64}{81}=\dfrac{144}{81}=\dfrac{16}{9}$. Conclusion : $OK=\dfrac{4}{3}$.

   d. On prend pour base (ABC) et la hauteur est donc [OK]. D'après 1., $AB^2=4+4=8$, donc $AB=2\sqrt{2}$; $AC^2=1+16+1=18$, donc $AC=3\sqrt{2}$. L'aire du triangle rectangle ABC est : $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=6$.
   Donc $V(OABC)=\dfrac{6\times OK}{3}=\dfrac{6\times\frac{4}{3}}{3}=\dfrac{8}{3}$.

3. **a.** Le barycentre G existe car la somme des coefficients $3+1+1+1$ est non nulle. Il est tel que $3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

   b. I centre de gravité du triangle ABC est l'isobarycentre du système de points pondérés $\{(A, 1),(B, 1),(C, 1)\}$.
   D'après l'associativité du barycentre, G est le barycentre (plus précisément l'isobarycentre) du système de points pondérés $\{(O, 3), (I, 3)\}$. G est donc le milieu de [OI], donc appartient à la droite (OI).

   c. On sait que $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Les coordonnées de I sont donc $\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{15}{3}\right)$. Celles de G : $\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.
   La distance de G au plan $\mathcal{P}$ est donnée par
   $$d(G,\mathcal{P})=\frac{\left|2x_G+y_G-2z_G+4\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5\right|}{3}=\frac{2}{3}.$$

4. En utilisant la relation de Chasles $3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 6\overrightarrow{MG}$, par définition du barycentre.

On a donc $\left\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5. \iff \left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = 5 \iff \text{G}M = \dfrac{5}{6}$.

L'ensemble Γ est donc la sphère de centre G et de rayon $\dfrac{5}{6}$.

D'après la question 3 c, la distance de G au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} < \dfrac{5}{6}$. Le plan $\mathscr{P}$ et la sphère Γ sont donc sécants : l'intersection est un cercle.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Question de cours : il suffit de montrer que le complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ a pour module 1 et a un argument égal à θ à 2π près.

2. a. D'après le résultat précédent si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation R on a alors : $z' - (2+2\text{i}) = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}[z - (2+2\text{i})] \iff$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[z - (2+2\text{i})] + 2 + 2\text{i} \iff$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - (1+\text{i}\sqrt{3})(1+\text{i}) + 2 + 2\text{i} \iff$$

$$\boldsymbol{z' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 + \sqrt{3} + \text{i}\left(1 - \sqrt{3}\right)}$$ qui est l'écriture complexe de R.

b. En appliquant cette relation à l'affixe de I, on obtient :

$z_{\text{A}} = \dfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) + \dfrac{\text{i}}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

c. On a $\text{IB}^2 = |1+\text{i}|^2 = 2$; de même $\text{IO}^2 = |1+\text{i}|^2 = 2$.

D'après la définition de la rotation R, le triangle BIA est isocèle d'angle au sommet de mesure $\frac{\pi}{3}$: c'est donc un triangle équilatéral.

Donc $\text{IB} = \text{AB} = \text{IA} = \text{IO} = \sqrt{2}$.

En particulier les points les points O, A et B sont équidistants de I. Ils sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

On a $1 + \text{i} = \dfrac{0 + (2+2\text{i})}{2}$, c'est-à-dire que I est le milieu du diamètre [OB].

Le triangle OAB est donc inscrit dans le cercle précédent : il est donc rectangle en A.

Par complément à π, on trouve que $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

d. On a $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \arg(z_{\text{I}}) = \frac{\pi}{4}$.

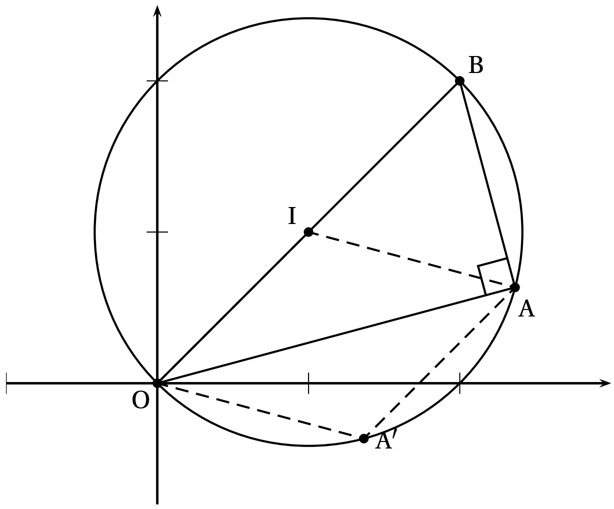
En appliquant la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) - \left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$.

3. a. $\text{A}' = T(\text{A})$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{IO}}$ est $-1-\text{i}$. On a donc

$z_{\text{A}'} = \dfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(3-\sqrt{3}\right) - 1 - \text{i} = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) + \dfrac{\text{i}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

b. On a par définition de la translation $\overrightarrow{\text{IO}} = \overrightarrow{\text{AA}'} \iff$ (OIAA′ est un parallélogramme ; de plus d'après 2 c AI = IO ; La quadrilatère OIAA′ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur : c'est donc un losange (mais pas un carré car $\left(\overrightarrow{\text{IO}},\ \overrightarrow{\text{IA}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.)

c. On sait que $\left(\overrightarrow{\text{OA}'},\ \overrightarrow{\text{OI}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OI}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$; en appliquant la relation de Chasles on obtient $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{OA}'}\right) = \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{OA}}\right) - \left(\overrightarrow{\text{OA}'},\ \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{12}$.



EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir le cours

2. a. Triangle (OAG) : on a OA = 2, OG $\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$, AG = $\sqrt{2}$.
Triangle OEF : on a OE = $\sqrt{2}$, OF = $\sqrt{5}$, EF = 1.
On remarque que $\dfrac{\text{OA}}{\text{OE}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\text{OG}}{\text{OF}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\text{AG}}{\text{EF}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.
Conclusion : Les triangles OAG et OEF sont donc semblables.

b. S'il existe une similitude indirecte S transformant OAG en OEF, son écriture est de la forme : $z'=a\overline{z}+b$, avec $a\in\mathbb{C}$, $b\in\mathbb{C}$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} S(\text{O})=\text{O}\\ S(\text{G})=\text{F}\\ S(\text{A})=\text{E}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & a\times 0+b\\ 1+\text{i} & = & a\times 2+b\\ 2+\text{i} & = & a\times(3-\text{i})+b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & 0\\ a & = & \frac{1}{2}(1+\text{i})\\ a & = & \frac{2+\text{i}}{3-\text{i}}\end{array}\right.$$

Or $a=\dfrac{(2+\text{i})(3+\text{i})}{(3-\text{i})(3+\text{i})}=\dfrac{5+5\text{i}}{10}=\dfrac{1}{2}(1+\text{i})$.
L'écriture complexe de S est donc : $z'=\dfrac{1}{2}\left(1+\text{i}\overline{z}\right)$.

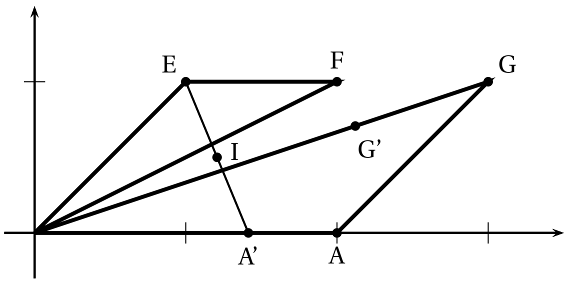
c. L'écriture complexe de h est : $z'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}z$.
L'affixe de A′ est donc $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Le milieu I de [EA′] a pour affixe
$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$.
L'équation de la droite (OI) est donc $y=\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)}x$. Calculons $\overrightarrow{\text{OI}}\cdot\overrightarrow{\text{EA}'}=$
$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\times\left(\sqrt{2}-1\right)+\dfrac{1}{2}\times(-1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$.
E est l'image de A par l'homothétie h suivie de la symétrie σ.
De même G(3 + i), donc G′$\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Le milieu J de [FG′] a pour affixe $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+1+\text{i}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2}\right)$.

On a $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Donc le point J appartient bien à la droite (OI).

De même $\overrightarrow{\text{OI}}\cdot\overrightarrow{\text{FG}'}=\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+\dfrac{3}{2}-1-\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{1}{2}=0$. F est donc l'image de G$'$ par la symétrie σ et F est l'image de G par l'homothétie h suivie de la symétrie σ.

Enfin O est l'image de O par l'homothétie h suivie de la symétrie σ.

Conclusion : d'après la question 1, on a $S=\sigma\circ h$.



EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Le numérateur de f est la composée d'une fonction affine et de la fonction ln. Elle est donc dérivable pour $x>-3$. Le dénominateur est une fonction affine. f est donc dérivable comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0~;~+\infty[$.

   On calcule $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$. Comme $(x+3)^2\geqslant 9>0$, la dérivée est du signe de $1-\ln(x+3)$.

   Or $1-\ln(x+3)=0 \iff \ln\text{e}=\ln(x+3)= \iff \text{e}=x+3 \iff x=\text{e}-3<0$.

   On a $x\geqslant 0 \iff x+3\geqslant 3>\text{e}\Rightarrow x+3>\text{e} \iff \ln(x+3)>\ln\text{e} \iff \ln(x+3)>1 \iff 0>1-\ln(x+3)$.

   Conclusion : sur $[0~;~+\infty[$, $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante sur cet intervalle.

   On a $f(0)=\dfrac{\ln 3}{3}$ et en posant $u=x+3$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

   D'où le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
f'	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{\ln 3}{3}$ ↘	0

2. **a.** Si $n\leqslant x\leqslant n+1$ alors par décroissance de la fonction sur f sur $[0~;+\infty[$, $f(n+1)\leqslant f(x)\leqslant f(n)$.

   b. En intégrant de n à $n+1$ les fonctions précédentes on obtient l'encadrement :

   Pour tout entier naturel n,

$\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x$ ou
$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

c. En appliquant le théorème des gendarmes, u_n qui est encadré par deux nombres qui ont pour limite 0 a pour limite 0.

3. a. La fonction définie par $x \mapsto u(x) = \ln(x+3)$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, ainsi que la fonction définie par $u \mapsto u^2$. Par composition, la fonction F est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Sur cet intervalle, $F'(x) = 2u \times u' = 2 \times \ln(x+3) \times \dfrac{1}{x+3} = 2\dfrac{\ln(x+3)}{x+3} = 2f(x)$.

b. D'après la question précédente , pour tout entier naturel n :

$I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{F(x)}{2}\right]_0^n = \dfrac{1}{2}\,[F(x)]_0^n = \dfrac{1}{2}[F(n) - F(0)] =$

$I_n = \dfrac{[\ln(n+3)^2 - [\ln 3]^2}{2}$.

4. Pour tout entier n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ par application de la relation de Chasles. Finalement : $S_n = I_n = \dfrac{[\ln(n+3)^2 - [\ln 3]^2}{2}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+3) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(n+3) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}[\ln(n+3)]^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

La suite (S_n) est divergente.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.
Pour $0 \leqslant k \leqslant 50$, $P(X = k) = \binom{50}{k}0,1^k \times 0,9^{50-k}$.

— $P(\text{A}) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,9)^{50} \approx 0,9948 \approx 0,995$ au millième.

— $P(\text{B}) = P(X = 0) + P(X = l) + P(X = 2) = 0,9^{50} + 50 \times 0,1 \times 0,9^{49} + \frac{50\times49}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^{48} \approx 0,111729 \approx 0,112$ au millième.

— $P(\text{C}) = 1 - P(\text{B}) \approx 1 - 0,111729 \approx 0,888$ au millième.

2. a. La probabilité qu'au moins trois personnes répondent est : $P(X \geqslant 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = l) + P(X = 2)] = 1 - \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^0}{0!} + \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^1}{1!} + \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^2}{2!}\right] = 1 - \mathrm{e}^{-a}\left[1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right]$.

b. $f(5) = 1 - \mathrm{e}^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-5} \times \frac{37}{2} \approx 0,8753 \approx 0,875$ au millième.

$a = 5$ correspond à $n = 50$: on est donc dans la situation de la question 1 où on avait une probabilité de 0,888 ; on a donc un résultat voisin.

3. a. La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}x^2}{2}$.

Comme $x^2 \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x) \geqslant 0$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

$f(0) = 0$. Comme $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ la limite de chacun des trois derniers termes est nulle en $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. D'où le tableau :

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
$f(x)$	0	1

b. Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue et strictement croissante de 0 à 1 . Or $0 < 0,95 < 1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0,95$.

La calculatrice indique : $f(6,29) \approx 0,94979$ et $f(6,3) \approx 0,958\,15$.

On a donc $6,29 < \alpha < 6,3$.

c. La probabilité qu'au moins trois personnes répondent parmi n personnes interrogées est $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ et $x = \dfrac{n}{10}$. Pour que $f(x) \geqslant 0,95$ ou d'après la question précédente $f(x) \geqslant f(\alpha)$ il faut que $x \geqslant \alpha$, d'après la croissance de la fonction f vue au 3 a. C'est-à-dire que $\dfrac{n}{10} \geqslant 6,3 \iff n \geqslant 63$.

Il faut donc interroger au minimum 63 personnes.