

∞ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2008 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. $x \geq 1 \Rightarrow e^x \geq e^1$ ou encore $e^x \geq e \Rightarrow e^x > 1$ (par croissance de la fonction exponentielle). f est donc bien définie pour $x \geq 1$.

H est bien définie pour $x \geq 1$ comme intégrale d'une fonction continue car quotient de deux fonctions continues sur $[1; +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas comme on l'a vu précédemment.

- b. On sait que $H'(x) = f(x)$: H est la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

- c. Sur $[1; +\infty[$, $x > 0$ et $e^x - 1 > 0$ (voir a.), donc la fonction f est positive sur l'intervalle $[1; x]$.

$H(x)$ est donc égale à la mesure (en unités d'aire) de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites verticales d'équation $X = 1$ et $X = x$.

$H(3)$ est donc égale à la mesure (en unités d'aire) de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

2. a. Si $x > 0$, l'image $f(x)$ peut s'écrire $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x \times e^{-x}}{e^{-x}(e^x - 1)} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

- b. En posant :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1 - e^{-x}) \end{cases}, \text{ on peut, toutes les fonctions étant}$$

continues sur $[1; 3]$, intégrer par parties :

$$\int_1^3 f(x) dx = [x \ln(1 - e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx =$$

$$3 \ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx.$$

- c. On a $1 \leq x \leq 3 \iff -3 \leq -x \leq -1 \iff e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1} \iff -e^{-1} \leq -e^{-x} \leq -e^{-3} \iff 1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - e^{-3}$.

Par croissance de la fonction \ln , on a donc :

$$\ln(1 - e^{-1}) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln(1 - e^{-3}).$$

- d. En intégrant les trois fonctions de l'inégalité précédente sur $[1; 3]$, on obtient :

$$\int_1^3 \ln(1 - e^{-1}) dx \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-3}) dx \text{ soit :}$$

$$2 \ln(1 - e^{-1}) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq 2 \ln(1 - e^{-3}).$$

On a donc $-2 \ln(1 - e^{-3}) \leq -\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq -2 \ln(1 - e^{-1})$. Donc finalement en utilisant le résultat de la question b. :

$$\ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln(1 - e^{-3}) - 3 \ln(1 - e^{-1}).$$

EXERCICE 2

5 points

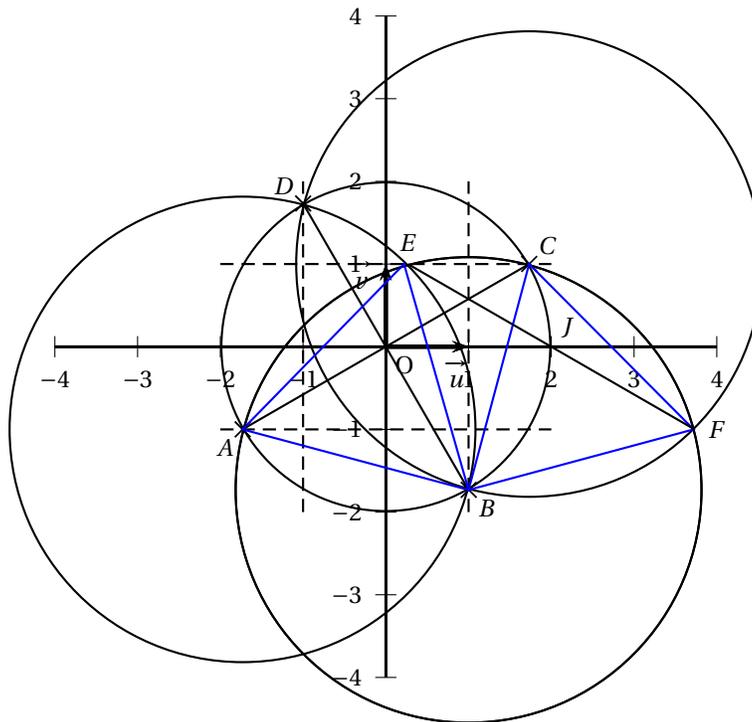
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

Partie B

1. a. • $|z_A|^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$, donc $|z_A| = 2$.
On a donc $z_A = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{-5\pi}{6} + i \sin \frac{-5\pi}{6} \right) = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$.
Le module est égal à 2 et un argument à $-\frac{5\pi}{6}$.
- De même, $|z_B| = 2$ et $z_B = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Le module est égal à 2 et un argument à $-\frac{\pi}{3}$.
- $z_C = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{\frac{\pi}{6}}$.
Le module est égal à 2 et un argument à $\frac{\pi}{6}$.
- $z_D = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}}$. Le module est égal à 2 et un argument à $\frac{2\pi}{3}$.
- b. En utilisant le cercle centré en O de rayon 2 et en traçant des médiatrices :



- c. A et C d'une part, B et D d'autre part ont leurs coordonnées opposées : ils sont donc symétriques autour de O, donc ABCD est un parallélogramme ;
Les arguments de B, C et D sont respectivement $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3}$, donc les droites (OB) et (OC) sont perpendiculaires, de même que (OC) et (OD). Le parallélogramme ABCD a ses diagonales perpendiculaires : c'est un losange ;
Comme [AC] et [BD] sont des diamètres le quadrilatère ABCD est un rectangle.
Conclusion : ABCD est un carré.

2. a. Dans la rotation r le point B , un point et son image sont les trois sommets d'un triangle équilatéral (triangle isocèle ayant un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$).
 Pour construire F il suffit de construire le cercle de centre B et de rayon BC et le cercle de centre C et de rayon CB .
 De même pour E , on trace le cercle de centre B et de rayon BA et le cercle de centre A et de rayon AB .
- b. On a $z' - (1 - i\sqrt{3}) = e^{-i\frac{\pi}{3}} [z - (1 - i\sqrt{3})] \Leftrightarrow$
 $z' = 1 - i\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) [z - (1 - i\sqrt{3})] \Leftrightarrow$
 $z' = 1 - i\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}.$
- $$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2.$$
- c. En remplaçant z par $-\sqrt{3} - i$, on obtient :
 $z_E = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-\sqrt{3} - i) + 2 = 2 - \sqrt{3} + i.$

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A****Partie B**

1. a. Voir la partie obligatoire.
 b. Voir la partie obligatoire.
 c. Comme vu plus haut O est le milieu de $[AC]$ et le milieu de $[BD]$.
 $\frac{z_B}{z_A} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{(1 - i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)}{(-\sqrt{3} - i)(-\sqrt{3} + i)} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} + i + 3i}{3 + 1} = i.$
 Donc les droites (OB) et (OC) sont perpendiculaires : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (ses diagonales ont le même milieu O), un rectangle (ses diagonales sont deux diamètres) et un losange (ses diagonales sont perpendiculaires) : c'est un carré.
2. a. Cherchons les points invariants en résolvant l'équation $z' = z \Leftrightarrow$

$$z = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2 \Leftrightarrow z \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = 2 \Leftrightarrow z \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$z \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow z = \frac{2}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}} = 1 - i\sqrt{3} = z_B.$$

Le seul point invariant est le point B .

De $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$ et

$1 - i\sqrt{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}} (1 - i\sqrt{3}) + 2$, on obtient par différence :

$$z' - (1 - i\sqrt{3}) = e^{-i\frac{\pi}{3}} [z - (1 - i\sqrt{3})]$$

g est donc la similitude directe de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. C'est la rotation de centre B .

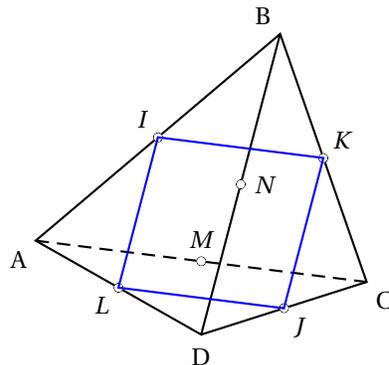
- b. Voir la partie obligatoire.
 Pour le point J image de O c'est le point d'affixe 2

- c. O est le milieu de $[AC]$, donc la rotation conservant les milieux J est le milieu de $[EF]$.

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats



1. $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\} = \text{bar}\{(I, 2), (J, 2)\}$. Donc G est le milieu de $[IJ]$.
Toujours en utilisant l'associativité du barycentre et en associant A et C d'une part B et D d'autre part on trouve que G est le milieu de $[MN]$.
Enfin en associant B et C d'une part A et D d'autre part on trouve que G est l'isobarycentre de $[KL]$.
Les segments $[KL]$, $[MN]$ et $[IJ]$ ont le même milieu.
- Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équi-facial, car ses faces sont isométriques).
2. a. En utilisant le théorème de la droite des milieux dans les triangles ABC et ACD , on a $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On en déduit que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ} \iff IKJL$ est un parallélogramme.
En utilisant le même théorème dans les triangles ABD et BCD , on trouve que $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{JK}$.
On a donc en prenant les normes $IK = \frac{1}{2}AC$ et $LI = \frac{1}{2}BD$. Or $AC = BD$. Conclusion : $LI = IK$.
Le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont la même longueur : c'est un losange. On démontre de la même façon que $IMJN$ et $KNLM$ sont des losanges.
- b. $IKJL$, $IMJN$ et $KNLM$ sont des losanges donc (IJ) et (KL) sont orthogonales de même que (IJ) et (MN) ainsi que (KL) et (MN) .
3. a. La droite (IJ) est orthogonale à deux droites (KL) et (MN) du plan du losange $KNLM$: elle est donc orthogonale à ce plan (MKN) .
- b. (IJ) orthogonale au plan (MKN) est orthogonale à toute droite de ce plan donc en particulier à la droite (MK) . Les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{MK} sont donc orthogonaux et par conséquent $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$.
Or dans le triangle ABC la droite (MK) (droite des milieux) est parallèle à (AB) . Conclusion (IJ) est perpendiculaire à la droite (AB) .
De même (IJ) est orthogonale à (NK) qui est parallèle à (CD) , donc (IJ) est perpendiculaire à (CD) .
- c. On a vu que $G \in (IJ)$ et (IJ) est perpendiculaire à $[AB]$, donc G appartient à la médiatrice de $[AB]$. Conclusion G est équidistant de A et de B , donc appartient au plan médiateur de $[AB]$. On démontre de même que G appartient au plan médiateur de $[CD]$.

d. On sait déjà que $GA = GB$ et que $GC = GD$.

On démontre de la même façon qu'à la question précédente que G appartient au plan médiateur de $[AD]$, donc que $GA = GD$.

Finalement on a $GA = GB = GC = GD$ ce qui montre que G est le centre de la sphère contenant les quatre points A, B, C et D .

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

1. a. On a $f(x) = 2x - \frac{x^2}{10}$, donc $f'(x) = 2 - \frac{x}{5}$. On a $f'(x) \leq 0 \iff x \leq 10$ et $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 10$.
La fonction f est donc croissante sur $[0; 10]$ et décroissante sur $[10; 20]$.
- b. Sur $[0; 20]$, le maximum de f est donc $f(10) = 10$, $f(0) = 0$ et $f(20) = 0$ sont les minimums de f .
On a donc quel que soit $x \in [0; 20]$, $f(x) \in [0; 10]$.
- c. Voir ci-dessous.

2. *Initialisation* : On a $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2 - 0,1 = 1,9$

On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$.

Hérédité : soit un naturel n et supposons que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

On a vu que sur l'intervalle $[0; 10]$, le fonction f est croissante, donc

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \iff u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

De plus d'après la question 1. b. quel que soit un nombre dans l'intervalle $[0; 20]$ et *a fortiori* dans l'intervalle $[0; 10]$, son image par f est elle aussi dans l'intervalle $[0; 10]$. On a donc bien $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle est vraie au rang $n+1$; on a démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. On vient en fait de démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Comme elle majorée par 10, elle converge vers une limite ℓ inférieure ou égale à 10.

Comme la fonction f est continue on obtient par passage à la limite :

$$\ell = 2\ell - \frac{\ell^2}{10} \iff 10\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(10 - \ell) = 0 \iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 10.$$

$\ell = 0$ n'est pas possible car $u_0 = \ell$ et la suite est croissante.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

Partie B : un modèle continu

1. a. $z = \frac{1}{y} \iff y = \frac{1}{z}$. z est dérivable et $z' = -\frac{y'}{y^2} = -y'z^2 \iff y' = -\frac{z'}{z^2}$. On a donc :

$$y' = \frac{1}{20}y(10 - y) \iff -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{20} \frac{1}{z} \left(10 - \frac{1}{z}\right) \iff z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Une solution constante évidente de E_1 est $z = \frac{1}{10}$.

Les solutions de l'équation différentielle $z' = -\frac{1}{2}z$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-\frac{x}{2}}$.

Les solutions de l'équation E_1 sont donc les fonctions

$$x \mapsto z(x) = Ke^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{10}.$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{Ke^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{10}}$.

$$2. \quad g \text{ est une solution de (E) telle que } g(0) = 1 \iff \frac{1}{Ke^{-\frac{0}{2}} + \frac{1}{10}} = 1 \iff \frac{1}{K+0,1} = 1 \iff$$

$$1 = K + 0,1 \iff K = 0,9 = \frac{9}{10}.$$

$$\text{Finalement } g(x) = \frac{1}{\frac{9}{10}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{9e^{-\frac{x}{2}} + 1}.$$

3. On a $g'(x) = -\frac{10 \times 9 \times (-\frac{1}{2})e^{-\frac{x}{2}}}{(9e^{-\frac{x}{2}} + 1)^2} = \frac{45e^{-\frac{x}{2}}}{(9e^{-\frac{x}{2}} + 1)^2}$. Cette dérivée ne comportant que des termes positifs est positive : la fonction g est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

4. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 10$.

Ceci signifie qu'à long terme le nombre de foyers équipés de téléviseurs à écran plat va se rapprocher de 10 millions.

5. Il faut résoudre l'inéquation $g(x) > 5 \iff \frac{10}{9e^{-\frac{x}{2}} + 1} > 5 \iff 2 > 9e^{-\frac{x}{2}} + 1 \iff 1 > 9e^{-\frac{x}{2}} \iff \frac{1}{9} > e^{-\frac{x}{2}} \iff -\ln 9 > -\frac{x}{2} \iff \frac{x}{2} > \ln 9 \iff x > 2\ln 9$ soit environ 4,3 ans ou en 5 ans à 1 an près soit en 2010.

ANNEXE

À rendre avec la copie

