

## Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2013

### EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

#### Partie 1

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

On sait qu'initialement, pour  $t = 0$ , le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

- Par propriété de la fonction exponentielle,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + be^{-0,04t} = 1$  donc par quotient  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = a$ , d'après l'énoncé on a donc  $a = 2$ .
- $h(0) = 0,1 \Rightarrow \frac{a}{1+b} = 0,1 \Rightarrow b = \frac{2}{0,1} - 1 = 19$

#### Partie 2

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$$

1.  $f$  est de la forme  $\frac{2}{u}$  avec  $u(t) = 1 + 19e^{-0,04t}$  donc  $f' = -\frac{u'}{u^2}$  avec  $u'(t) = -0,76e^{-0,04t}$ , soit (confusion à ne pas faire entre fonction  $u$ ,  $u'$  et valeurs en  $t$  ...)

$$f'(t) = \frac{2 \times 0,76e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}$$

Pour tout  $t \in [0; 250]$ ,  $f'(t) > 0$  donc  $f$  strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 250]$ .

2. Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à 1,5 m se traduit par  $h(t) > 1,5$

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}} &> 1,5 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{1,5} - 1 &> 19e^{-0,04t} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{57} &> e^{-0,04t} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{57}\right) &> -0,04t \\ \Leftrightarrow -\ln 57 &> -0,04t \\ \Leftrightarrow \frac{\ln 57}{0,04} &< t \end{aligned}$$

Or  $\frac{\ln 57}{0,04} \approx 101,08$ .

Il faut donc un peu plus de 101 jours pour que le plant dépasse 1,5 m.

3. (a) Pour tout réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0; 250]$  on a

$$\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} \left(1 + \frac{19}{e^{0,04t}}\right)} = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}(1 + 19e^{-0,04t})} = f(t)$$

$F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$  est de la forme  $50 \ln u(t)$  avec  $u(t) = e^{0,04t} + 19$  et  $u(t) > 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

donc  $F' = 50 \frac{u'}{u}$  avec  $u'(t) = 0,04e^{0,04t}$ , soit

$$F'(t) = 50 \times \frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = f(t).$$

$F$  est donc bien une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 250]$ .

(b) Par définition la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[50; 100]$  est  $\mu = \frac{1}{100-50} \int_{50}^{100} f(t)dt$ .

$$\mu = \frac{1}{50} [F(t)]_{50}^{100} = \ln(e^4 + 19) - \ln(e^2 + 19) \simeq 1,03.$$

La hauteur moyenne du plant entre le 50<sup>e</sup> et le 100<sup>e</sup> jour est de 1,03 m.

4. D'après le graphique, la vitesse est maximale lorsque la pente (coefficient directeur) de la tangente à la courbe est maximale, soit à  $t = 80$ , la hauteur du plant est environ de 1,15 m.

## EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

Les bonnes réponses sont **b. c. a. b.**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal.  $t$  et  $t'$  désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation  $x - 2y + 3z + 5 = 0$  et donc, par propriété, il a pour vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Le plan (S) a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = 0 - t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$

Par propriété, le plan (S) passe par  $F(-2; 0; -1)$  et a pour vecteurs de base  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

La droite (D) a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Par propriété, la droite (D) passe par  $F(-2; 0; -1)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , elle est donc clairement contenue dans le plan (S) pour la valeur  $t' = 0$ .

On donne les points de l'espace  $M(-1; 2; 3)$  et  $N(1; -2; 9)$ .

1. La bonne réponse est **b.** en excluant les trois autres ou en vérifiant directement.

**a.** N'est pas un plan mais une droite.

**c.**  $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = 1 - t - 3t' \end{cases}$  passe par  $(0; 1; 1) \notin (P)$ .

**d.**  $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -1 - t' \end{cases}$  passe par  $(1; 1; -1) \notin (P)$

**b.**  $\begin{cases} x = t+2t' \\ y = 1-t+t' \\ z = -1-t \end{cases}$  passe par le point A(0; 1; -1) qui est élément de (P) car  $0-2+3 \times (-1)+5=0$

et a pour vecteurs directeurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Or  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  donc  $\vec{n}$  normal à deux vecteurs non colinéaires du plan est normal au plan. On a bien une représentation paramétrique du plan (P).

2. La bonne réponse est **c.** « La droite (D) est une droite du plan (P). »

Remplaçons, pour  $t$  quelconque, les coordonnées d'un point de la droite dans l'équation du plan (P). Quel que soit  $t \in \mathbb{R}$ ,  $-2-t-2 \times (-t)+3 \times (-1-t)+5 = -2-3+5+t+2t-3t=0$ , donc tout point de  $\Delta$  appartient à (P), la droite est contenue dans (P).

3. La bonne réponse est **a.** « La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales. »

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc  $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 1+2-3=0$  prouve que (MN) est orthogonale à (D).

4. La bonne réponse est **b.** « La droite ( $\Delta$ ) et la droite d'intersection de (P) et (S). »

On vérifie que la droite  $\Delta$  est contenue dans chacun des deux plans (qui ne sont pas confondus par ailleurs).

- . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t-2 \times (-2-t)+3 \times (-3-t)+5 = t+4+2t-9-3t+5=0$  prouve  $(\Delta) \subset (P)$ .
- . Soit E le point de  $\Delta$  de paramètre  $t=0$  : E(0 ; -2 ; -3) et soit F le point de paramètre  $t=-2$  : F(-2 ; 0 ; -1). On reconnaît le point de (S) de paramètre ( $t=0, t'=0$ ) donc  $F \in (S)$ . Montrons que  $E \in (S)$ .

$$\text{Résolvons le système } \begin{cases} 0 & = & -2+t+2t' \\ -2 & = & -t-2t' \\ -3 & = & -1-t+3t' \end{cases}$$

En additionnant les lignes (1) et (3) on obtient  $5t'=0$  donc  $t'=0$  et en remplaçant dans les trois équations on obtient bien une seule valeur de  $t=2$ .

Cela prouve que  $E \in (P)$  pour ( $t=2, t'=0$ ).

Conclusion : les points E et F sont dans (S), donc la droite ( $\Delta$ ) est entièrement contenue dans (S).

La droite ( $\Delta$ ) étant simultanément contenue dans les deux plans (non confondus) est la droite d'intersection.

(Remarque : Les réponses **a.** et **c.** pouvaient être éliminées de manière directe, mais la réponse **b.** exclut aussi la réponse **d.**).

**EXERCICE 3**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend  $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

(a)  $z_M = 2 \times \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}$ .

(b)  $z_{M'} = -iz_M = -i(1 - i\sqrt{3}) = -i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$ .

Module et argument méthode algébrique :

$$|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \text{ et si l'on nomme } \theta \text{ un argument de } z_{M'} \text{ alors, par propriété, } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

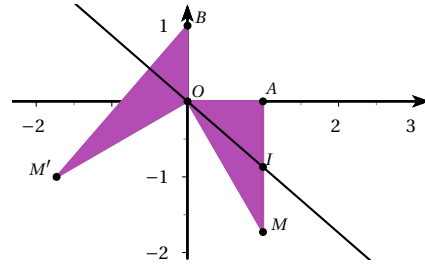
On reconnaît  $\theta = -\frac{5\pi}{6}$  (modulo  $2\pi$ ).

Module et argument par la forme exponentielle :

$$|z_{M'}| = |-i| \times |z_M| = 1 \times |2e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 2$$

$$\arg(z_{M'}) = \arg(-i) + \arg(z_M) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} \text{ (modulo } 2\pi\text{)}.$$

- (c) La figure n'est pas à l'échelle.  
Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.



2. Cas général en prenant  $z_M = x + iy$  avec  $y \neq 0$ .

(a)  $z_I = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{x+1}{2} + i\frac{y}{2}$ .

(b)  $z_{M'} = -i(x + iy) = y - ix$ .

(c)  $I\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right)$ ,  $B(0; 1)$  et  $M'(y; -x)$ .

(d)  $\vec{OI} \cdot \vec{BM'} = \left(\frac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\frac{y}{2}\right) \times (-x-1) = \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{1}{2} = 0$  donc les droites  $(OI)$  et  $(BM')$  sont perpendiculaires.

(e)  $BM' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$  et d'autre part,  $2OI = 2\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$  donc

$$2OI = BM'.$$

EXERCICE 3

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) On a  $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,125j_n + 0,525a_n \\ 0,625j_n + 0,625a_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$ .
- (b) un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).  $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 + 262,5 \\ 125 + 312,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix}$ .  
 Au bout de 1 an il y aura 287 jeunes et 437 adultes.  
 $U_2 = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35,9375 + 229,688 \\ 179,688 + 273,438 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265,625 \\ 453,125 \end{pmatrix}$ .  
 Au bout de 2 ans il y aura 265 jeunes et 453 adultes.
- (c) fonction de  $A^n$  et de  $U_0$ . Une récurrence simple permet de montrer que quel que soit le naturel  $n$ ,  $U_n = A^n \times U_0$ .

2. (a)  $Q \times D = \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix}$ , puis

$$(Q \times D) \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -0,175 + 0,3 & 0,105 + 0,42 \\ 0,125 + 0,5 & -0,075 + 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} = A.$$

- (b)  $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$ ?

*Initialisation* : On a bien  $A^1 = Q \times D^1 \times Q^{-1}$  (question précédente).

*Hérédité* : Supposons que pour tout entier  $p > 1$ ,  $A^p = Q \times D^p \times Q^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } A^{p+1} &= A^p \times A = (Q \times D^p \times Q^{-1}) \times (Q \times D \times Q^{-1}) = Q \times D^p \times (Q^{-1} \times Q) \times D \times Q^{-1} = \\ &= Q \times D^p \times I \times D \times Q^{-1} = Q \times (D^p \times D) \times Q^{-1} = Q \times D^{p+1} \times Q^{-1}. \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang  $p + 1$ .

$A^1 = Q \times D^1 \times Q^{-1}$  et pour tout entier  $p > 1$ ,  $A^p = Q \times D^p \times Q^{-1}$  entraîne  $A^{p+1} = Q \times D^{p+1} \times Q^{-1}$  donc par le principe de récurrence, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}.$$

- (c) La matrice  $D$  est diagonale, donc :

$$D^n = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Quel que soit le naturel  $n$  :

$$U_n = A^n \times U_0 =$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 60 + 140 \times (-0,25)^n + 210 - 210 \times (-0,25)^n \\ 100 + -100 \times (-0,25)^n + 350 + 150 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Conclusion } \begin{cases} j_n &= 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ a_n &= 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{cases}$$

- (b) Comme  $-1 < -0,25 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,25)^n = 0$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} j_n = 270 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 450.$$

Le nombre d'animaux jeunes va tendre vers 270 et celui des adultes vers 450 au bout de quelques années.

**EXERCICE 4**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

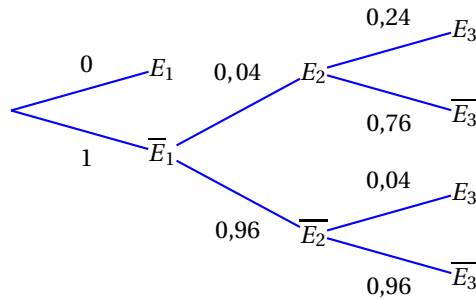
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine  $n$  le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine  $n + 1$  avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine  $n$  le salarié est malade, il reste malade la semaine  $n + 1$  avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, par  $E_n$  l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la  $n$ -ième semaine ». On note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $E_n$ .

On a ainsi :  $p_1 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 :  $0 \leq p_n < 1$ .

1. (a) Déterminer la valeur de  $p_3$  à l'aide d'un arbre de probabilité.

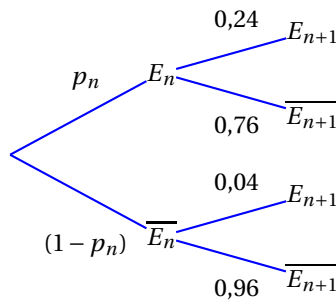


Théorème des probabilités totales :  $E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$  (union d'évènements disjoints)  
 $p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048$ .

- (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

2. (a) Complétons l'arbre



- (b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1} \text{ (union d'évènements disjoints)}$$

$$p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = 0,2p_n + 0,04$$

- (c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$$

donc  $(u_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $u_1 = -0,05$  et la raison  $r = 0,2$ .

Par propriété, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$   
 et donc :  $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$ .

(d) Limite de la suite  $(p_n)$ .

Comme  $|0,2| < 1$  alors par théorème :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,05$ .

(e) Le nombre  $J$  qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite  $(p_n)$  qui s'approche de la limite  $0,05$  à  $10^{-K}$  près, où  $K$  est un entier fixé au départ.

La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en (d).

3. (a) • Une semaine donnée, on peut définir une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'évènement  $E$  « un salarié est absent pour maladie. »  
 • L'état de chaque salarié étant supposé indépendant de l'état des autres, on obtient donc un Schéma de Bernoulli sur les 220 salariés de l'entreprise.  
 • La variable aléatoire  $X$  qui donne le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit, par propriété, la loi binomiale  $\mathcal{B}(220 ; 0,05)$ .

Par propriété,

$$\mu = E(X) = np = 220 \times 0,05 = 11 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} \approx 3,23.$$

(b) On a bien :

$n \geq 30$ ,  $np \geq 5$  et  $n(1-p) \geq 5$ , donc la loi de  $X$  peut être approchée par la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Donc la loi de  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  peut être approchée par une loi normale  $\mathcal{N}(0 ; 1)$ .

La probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 » se note

$P(7 \leq X \leq 15)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7-11}{3,23} \approx -1,238 \\ \frac{15-11}{3,23} \approx 1,238 \end{array} \right\} \text{ donc } P(7 \leq X \leq 15) \approx P(-1,24 < Z < 1,24)$$

Au moyen de la table fournie :

$$P(-1,24 < Z < 1,24) = P(Z < 1,24) - P(Z < -1,24) = 0,892 - 0,108 = 0,784.$$

À  $10^{-2}$  près, on a donc  $P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,78$ .

Annexe (Exercice 1)

