∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∾
Corrigé du sujet 49 mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

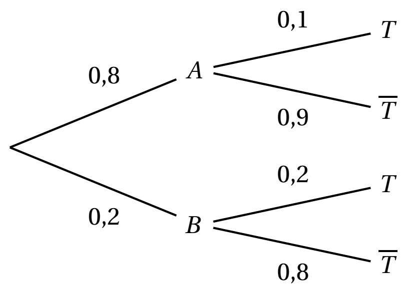
EXERCICE 1 — 5 POINTS

1. On considère la droite d dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé est $2x-3y+4=0$.
   Un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
   On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} = -36+36 = 0$: la réponse **b.** est vraie
2. Dans un repère orthonormé le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2-2x+y^2+y=3$
   et la droite $\mathcal{D}$ pour équation $y=1$.
   Un point $M(x\,;\,y)\in\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x^2-2x+y^2+y &=& 3\\ y &=& 1\end{array}\right. \Rightarrow x^2-2x+1+1=3 \iff x^2-2x-1=0.$
   Pour cette équation du second degré : $\Delta = (-2)^2-4\times(-1) = 4+4 = 8 > 0$: l'équation a deux solutions distinctes. C'est l'affirmation **c.** qui est vraie.
3. La fonction f est la fonction définie sur l'ensemble des réels par $f(x)=\cos(2x)$.
   On a $f(-x) = /cos(-2x) = \cos 2x$. L'affirmation **a.** est vraie.
4. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$.
   Le bon algorithme est le **d.**
5. L'équation $\mathrm{e}^x = 1$:
   On a bien $\mathrm{e}^0 = 1$. L'affirmation **c.** est vraie.

EXERCICE 2 — 5 POINTS

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au centième.

1.



2. On a $P(A\cap T) = P(A)\times PA(T) = 0,8\times 0,1 = 0,08$ (ou 8 /
3. $B\cap\overline{T}$ désigne l'évènement = « la boîte prélevée provient du fournisseur *Bon thé* et ne contient pas de traces de pesticides ».
   $P\left(B\cap\overline{T}\right) = P(B)\times PB\left(\overline{T}\right) = 0,2\times 0,8 = 0,16$ ou 16 %.
4. On a de la même façon qu'à la question précédente :
   $P\left(A\cap\overline{T}\right) = P(A)\times P_A\left(\overline{T}\right) = 0,8\times 0,9 = 0,72$ ou 72 %.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $P\left(\overline{T}\right) = P\left(A\cap\overline{T}\right) + P\left(B\cap\overline{T}\right) = 0,72+0,16 = 0,88$ ou 88 %.
5. • On a $P(T) = 1-P\left(\overline{T}\right) = 1-0,88 = 0,12$
   • On a $P(B\cap T) = P(B)\times PB(T) = 0,2\times 0,2 = 0,04$.
   Il faut donc trouver $P_T(B) = \dfrac{P(T\cap B)}{P(T)} = \dfrac{P(B\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,04}{0,12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$.
   Si une boîte a des traces de pesticides il y a deux chances sur trois qu'elle provienne de *Au bon thé* et une chance sur trois qu'elle provienne de *Bon thé*.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

1. • On a donc $u_2 = 200+5 = 205$ et $u_3 = u2+5 = 205+5 = 210$;
   • On a donc $v_2 = 200 \times \left(1+\dfrac{2}{100}\right) = 200 \times 1+0,02) = 200 \times 1,02 = 204$ et $v_3 = v_2 \times 1,02 = 208,80$ (en euro) ;
2. **a.** Ligne 5 : u = u + 5
   Ligne 6 : v = v *1,02
   b. $u_4 = u_3 + 5 = 215$ et $v_4 = v_3 \times 1,02 = 110,976 \approx 110,98$.
3. • Quel que soit le naturel $n, \quad n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = u_n + 5$: ceci signifie que la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme 200 et de raison 5. On sait qu'alors pour $n \geqslant 1$, on a $u_n = 200+5(n-1)$;
   • Quel que soit le naturel $n, \quad n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = v_n \times 1,02$: ceci signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme 200 et de raison 1,02. On sait qu'alors pour $n \geqslant 1$, on a $v_n = 200 \times 1,02^{n-1}$.
4. 3 ans correspondent à $3 \times 12 = 36$ mois de loyers.
   • Avec le premier contrat :
   $S_{36} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{36}$ que l'on peut écrire :
   $S_{36} = 200+205+\ldots 200+5 \times 35$ ou encore :
   $S_{36} = 200+5 \times 35+\ldots+205+200$ et en sommant membres à membres :
   $2S_{36} = 36 \times (200+200+5 \times 35) = 36 \times 575 = 20\,700$, d'où $S_{36} = 10\,350$ (euros).
   • Avec le second contrat :
   $T_{36} = v_1 + v_2 + \ldots + v_{36}$ que l'on peut écrire :
   $T_{36} = 200+200 \times 1,02+\ldots 200 \times 1,02^{35}$ (1) d'où par produit par 1,02 :
   $1,02T_{36} = 200 \times 1,02+200 \times 1,02^2+\ldots+200 \times 1,02^{36}$ (2) et par différence ligne (2) - ligne (1) :
   $0,02T_{36} = 200 \times 1,02^{36} - 200$, d'où $T_{36} = \dfrac{200 \times 1,02^{36} - 200}{0,02} \approx 10\,398,87$.
   C'est donc le premier contrat qui reviendra le moins cher (de peu!).

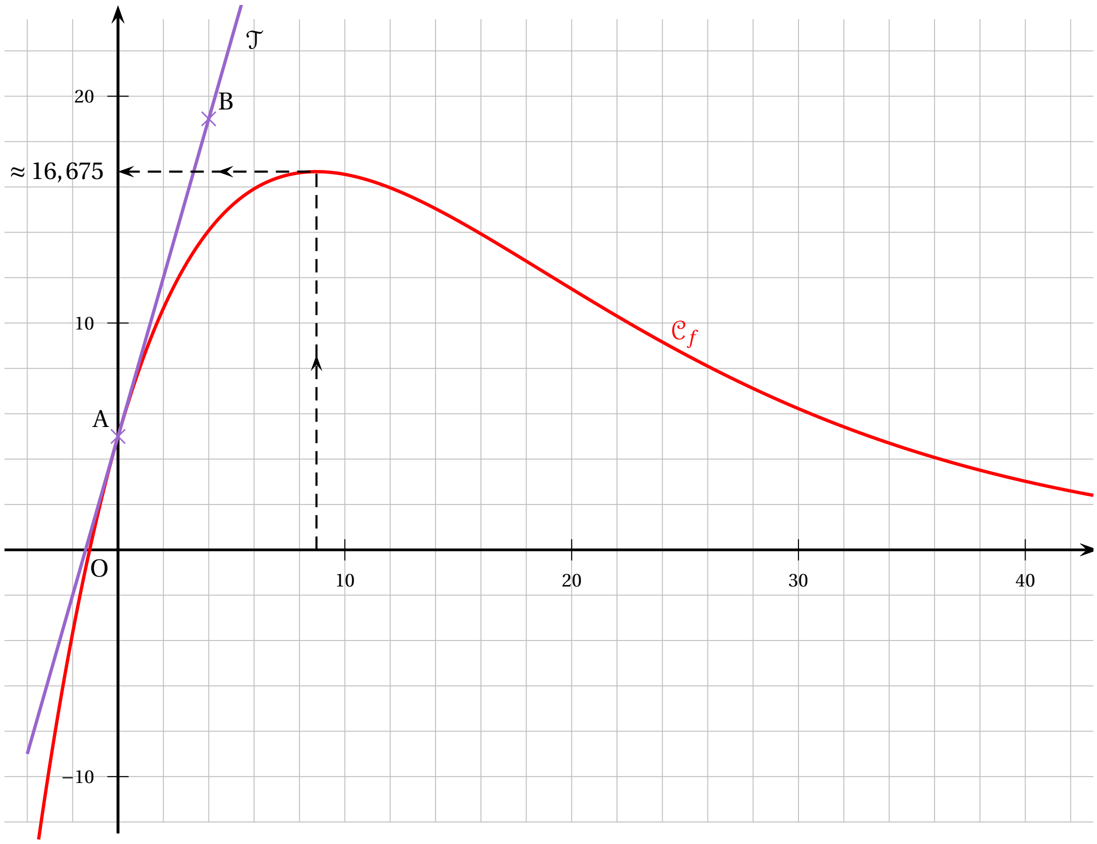
EXERCICE 4 **5 POINTS**

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,1x}$$

où a et b sont des réels fixés.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous, dans un repère orthogonal.

1. On calcule $f(0) = (0+b)\mathrm{e}^{-0,1\times 0} = b\mathrm{e}^0 = b = 5$ puisque $\mathrm{A}(0\,;\,5) \in \mathcal{C}_f$.
2. **a.** Pour l'équation réduite de (AB), l'ordonnée à l'origine est 5 et le coefficient directeur de la droite est égal à : $\dfrac{19-5}{4-0} = \dfrac{14}{4} = 3,5$.
   L'équation réduite de la droite (AB) est donc $y = 3,5x+5$.
   b. On a $f(x) = (ax+5)\mathrm{e}^{-0,1x}$, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc en dérivant comme un produit $((uv)' = u'v+uv`)$:
   $f'(x) = a\mathrm{e}^{-0,1x} - 0,1(ax+5)\mathrm{e}^{-0,1x} = \mathrm{e}^{-0,1x}[a-0,1(ax+5)] = \mathrm{e}^{-0,1x}(a-0,1ax-0,5)$.
   Or on sait que le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est le nombre dérivé $f'(0)$. Donc :
   $f'(0) = \mathrm{e}^0(a-0-0,5) = a-0,5 = 3,5$, d'où on déduit $a = 3,5+0,5 = 4$.
   On a donc sur $\mathbb{R}, \quad f(x) = (4x+5)\mathrm{e}^{-0,1x}$.
3. **a.** Avec l'expression trouvée pour $f'(x)$ ci-dessus et en remplaçant a par 4, on obtient :
   $f'(x) = \mathrm{e}^{-0,1x}(4-0,1\times 4x-0,5) = (-0,4x+3,5)\mathrm{e}^{-0,1x}$.
   b. On sait que l que soit $x/in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-0,1x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-0,4x+3,5$.
   • $-0,4x+3,5 > 0 \iff 3,5 > 0,4x \iff \dfrac{3,5}{0,4} > x \iff x < 8,75$: la dérivée est positive, donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,8,75[$;
   • $-0,4x+3,5 < 0 \iff 3,5 < 0,4x \iff \dfrac{3,5}{0,4} < x \iff x > 8,75$: la dérivée est négative, donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]8,75\,;\,\infty[$;
   • $f'(8,75) = 0$: le point d'abscisse 8,75 est la maximum de la fonction sur $\mathbb{R}$; ce maximum est égal à $f(8,75) = (4\times 8,75+5)\mathrm{e}^{-0,1\times 8,75} \approx 16,675$. (ce que confirme la figure)



$\mathcal{T}$
20
B
≈ 16,675
10
A
O
10
20
30
40
$\mathcal{C}_f$
−10