↫ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ↬
Corrigé du sujet 52 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1– QCM **5 points**

Question 1

$3\times\dfrac{10^n}{2^{n+1}}=3\times\dfrac{10^n}{2^n\times 2}=3\times\left(\dfrac{10}{2}^n\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\times 5^n.$

(u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $\dfrac{3}{2}$ (ou 1,5) et de raison 5.

Question 2

Avec $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{C}M}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$,

$M(x\,;\,y)\in\Delta\iff\overrightarrow{\mathrm{C}M}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\iff 4(x+1)+3(y-1)=0\iff 4x+4+6y-3=0\iff 4x+3y+1=0.$

Question 3

$2\cos(x+\pi)+1=0\iff 2\cos(x+\pi)=-1\iff\cos(x+\pi)=-\dfrac{1}{2}.$

Or on sait que $\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$, on a donc

$\cos(x+\pi)=\cos\dfrac{2\pi}{3}.$

On a donc :

$(x+\pi)=\dfrac{2\pi}{3}$ ou $(x+\pi)=-\dfrac{2\pi}{3}$, soit

$x=-\dfrac{\pi}{3}$ ou $x=-\dfrac{5\pi}{3}.$

La première solution n'appartient pas à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$; c'est donc la seconde $\left(-\dfrac{5\pi}{3}+2\pi=-\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{6\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Question 4

Le dénominateur étant supérieur ou égal à 1, la fonction est dérivable et en la dérivant comme un quotient :

$f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$

Question 5

$f(x)$ est un trinôme du secon degré de coefficient principal $-4,5<0$; sa représentation graphique est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas.

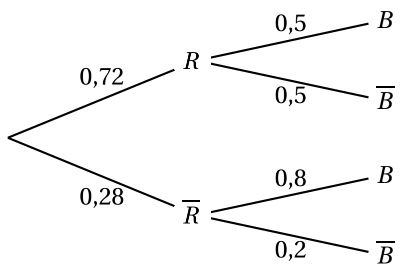
On voit que le maximum de f est obtenue pour $x=-2$ et qu'alors ce maximum est égal à 4,5. Les propositions A, B et D sont donc fausses.

On voit que $f(-5)=f(1)=0$: donc -5 et 1 sont les racines du trinôme. On sait que ce trinôme est négatif sauf entre les racines ; c'est bien ce qui est indiqué dans le tableau C.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Dans l'énoncé la dernière indication signifie que $p(R\cap B)=0,36$.

   b. Recopier et compléter le plus possible l'arbre de probabilité ci-dessous en traduisant uniquement les données de l'énoncé.



c. On a $p\left(\overline{R}\cap B\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(B) = 0,28\times 0,8 = 0,224$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(B) = p(R\cap B) + p\left(\overline{R}\cap B\right) = 0,36 + 0,224 = 0,584$.

2. On note X la variable aléatoire qui donne le prix d'un bouquet acheté par un client.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant, pour chaque valeur x_i de X, la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$. Justifier.

x_i	0,36	0,36	0,224	0,056
$p(X = x_i)$	25,50	23,50	11,60	10,50

b. On a $E(X) = 0,36\times 25,5 + 0,36\times 23,5 + 0,224\times 11,6 + 0,056\times 105 = 20,8264 \approx 20,83$ (€).

EXERCICE 3 — 5 points

$$f(x) = 60x\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

1. f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,10]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 60\mathrm{e}^{-0,5x} + 60x\times(-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x} = \mathrm{e}^{-0,5x}(60-30x) = -30(x-2)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$. $f'(x) = 30(2-x)\mathrm{e}^{-0,5x}$. On sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2-x$:

- $2-x>0 \iff 2>x \iff x<2$: sur $[0\,;\,2]$, $f'(x)>0$;
- $2-x<0 \iff 2<x \iff x>2$: sur $[2\,;\,10]$, $f'(x)<0$;
- $2-x=0 \iff 2=x$: sur $[0\,;\,2]$, $f'(2)=0$.

3. D'après la question précédente f est croissante sur $[0\,;\,2]$ de $f(0)=0$ à $f(2) = 120\mathrm{e}^{-1} \approx 44,1$, puis décroissante de $f(2) = 120\mathrm{e}^{-1}$ à $f(10) = 600\mathrm{e}^{-5} \approx 4,04$. D'où le tableau :

x	0		2		10
$f'(x)$		+	0	−	
f			$120\mathrm{e}^{-1}$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	$600\mathrm{e}^{-5}$

4. On a vu que $f'(2)=0$: le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f est parallèle à l'axe des abscisses est horizontale.

5. On sait qu'une équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :
$y - f(0) = f'(0)(x-1)$;
Avec $f(0)=0$ et $f'(0) = -30(0-2)\mathrm{e}^{-0,5\times 0} = 60\mathrm{e}^0 = 60\times 1 = 60$. L'équation devient :
$y = 60x$.

EXERCICE 4 — 5 points

1. a. Augmenter de 1,52 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{1,52}{100} = 1 + 0,0152 = 1,0152$.
On a donc au 1er janvier 2020 un loyer de :
$u_1 = 650\times 1,0152 = 659,88$ (€).

b. On multiplie chaque le montant du loyer u_n par 1,015 2, donc quel que soit $n\in\mathbb{N}$,
$u_{n+1} = 1,0152u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,015 2, de premier terme $u_0 = 650$.

c. 2027 correspond à $n=8$ et $u_8 = u_0\times 0,0152^8 = 650\times 0,0152^8 \approx 733,38$ (€).

2. a. somme(0) représente le total des loyers perçus en 2019 ($12\times 650 = 7800$) ;
somme(1) représente le total des loyers perçus de 2019 à 2020 ;

b. 2027 correspond à A = 8.
On a : somme(0) = 78 000
somme(1) ≈ 15 178,56
somme(2) ≈ 23 757,48 et
somme(8) ≈ 74 623,04.
Donc le total des loyers encaissés de 2022 à 2027 est :
somme(8) − somme(2) ≈ 74 623,04 − 23 757,48 soit environ 50 865,6 (€) ou 50 866 € à l'euro près.