ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2
Corrigé du sujet 57 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 points**

Question 1

Quelle est la bonne proposition ?
$y = 2x^2+4x-11 = 2\left(x^2+2x-\dfrac{11}{2}\right) = 2\left[(x+1)^2-1-\dfrac{11}{2}\right] = 2(x+1)^2-2-11 = 2(x+1)^2-13.$
On constate avec cette écriture que le minimum de la fonction est obtenu pour $x=-1$ et que ce minimum est égal à -13.
La concavité de la parabole est tournée vers le haut ($a=2>0$), donc le sommet S a pour coordonnées $(-1~;~-13)$.
L'axe de symétrie est la droite d'équation $x=-1$.

Question 2

On a $p_B(A) = \dfrac{p(B\cap A)}{p(B)} = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A)\times p_A(B)}{p(A\cap B)+p\left(\overline{A}\cap B\right)} = \dfrac{0,6\times 0,3}{0,6\times 0,3+0,4\times 0,2} = \dfrac{0,18}{0,18+0,08} = \dfrac{0,18}{0,26} = \dfrac{18}{26} = \dfrac{9}{13}$.

Question 3

On a $\dfrac{18\pi}{5} - \left(\dfrac{-12\pi}{5}\right) = \dfrac{30\pi}{5} = 6\pi = 3\times 2\pi$. Donc réponse **C.**

Question 4

Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x) = (1+x)\mathrm{e}^x$.

Question 5

$u_n = \frac{u_{n-1}}{2}$ ou $u_n = \dfrac{1}{2}\times u_{n-1}$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 2 **(5 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3+3x^2+3x-63$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. $f'(x) = 3x^2+6x+3 = 3\left(x^2+2x+1\right) = 3(x+1)^2$.
2. Produit de deux nombres positifs, $f'(x)$ est positive quel que soit le réel x.
3. Puisque $f(x) \geqslant 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est :
   $y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1))$.
   Avec $f(-1) = -1+3-3-63 = -64$ et $f'(-1) = 3(-1+1)^2 = 3\times 0 = 0$, l'équation devient : $y-64=0$ ou $y=64$. La droite a un coefficient directeur égal à 3. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite si :
   $f'(x)=3$, soit $3(x+1)^2=3$ ou encore $(x+1)^2=1$, d'où $(x+1)^2-1=0$, puis $x+1+1)(x+1-1)=0$, $x(x+2)=0$.
   Il y a donc deux solutions : $x=0$ et $x=-2$. Pour $x=0$, $f(0)=-63$ et $f(-2) = -8+12-6-63 = -65$.
   Les tangentes aux points $(0~;~-63)$ et $(-2~;~-65)$ sont parallèles à la droite d'équation $y=3x-100$.

EXERCICE 3 **5 points**

1. Ajouter 5 % à un nombre c'est le multiplier par $1+\dfrac{5}{100} = 1+0,05 = 1,05$.
   Donc $u_1 = 5000\times 1,05 = 5250$, puis
   $u_2 = u_1\times 1,05 = 5250\times 1,05 = 5512,50$ (€)

2. On a vu que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05u_n$.
3. La relation précédente montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05, de premier terme $u_0 = 5000$.
4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5000 \times 1,05^n$.
5. Au bout de 15 ans la somme jusque là immobilisée sera égale à :
$u_{15} = 5000 \times 1,05^{15} \approx 10394,64$ (€). Le capital initial aura plus que doublé.

EXERCICE 4 **5 points**

1. On a $\text{AB}^2 = (1-(-2))^2 + (2-1)^2 = 9+1 = 10$. Le carré du ra yon est égal à 10.
$M(x\,;\,y) \in \mathscr{C} \iff \text{A}M^2 = 10 \iff (x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$.
2. Avec $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AE}}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$, on a
$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AE}} = 6 - 6 = 0$.
3. La question précédente montre que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AE}}$ sont orthogonaux, donc que les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires
4. On a donc $M(x\,;\,y) \in (\text{AE}) \iff \overrightarrow{\text{A}M} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0 \iff 3(x+2) + 1(y-1) = 0 \iff 3x + y + 5 = 0$.
5. Un point $M(x\,;\,y)$ est commun à la droite (AE) et au cercle $\mathscr{C}$ si ses coordonnées vérifient leurs équations et donc le système :
$$\left\{\begin{array}{l c l}(x+2)^2+(y-1)^2 &=& 10\\ 3x+y+5=0 & & \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l c l}(x+2)^2+(y-1)^2 &=& 10\\ y &=& -3x-5\end{array}\right. \iff$$
$$\left\{\begin{array}{l c l}(x+2)^2+(-3x-5-1)^2 &=& 10\\ y &=& -3x-5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}(x+2)^2+(-3x-6)^2 &=& 10\\ y &=& -3x-5\end{array}\right. \iff$$
$$\left\{\begin{array}{l c l}x^2+4x+4+9x^2+36+36x &=& 10\\ y &=& -3x-5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}10x^2+40x+30 &=& 0\\ y &=& -3x-5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}x^2+4x+3 &=& 0\\ y &=& -3x-5\end{array}\right.$$
l'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$ a une racine évidente : -1 et comme le produit des racines est égal à 3, l'autre racine est -3.
En remplaçant successivement x par -1 puis par -3 dans l'équation $y = -3x - 5$, on obtient deux points communs au cercle et à la droite les points $(-1\,;\,-2)$ et $(-3\,;\,4)$.