∽ Baccalauréat Première Métropole-La Réunion ∾
série générale e3c Corrigé du n° 5 année 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Première générale

Exercice 1 **5 points**

Ce QCM comprend 5 questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - x$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

a. f est paire	**b.** f est impaire	**c.** Pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x)$	**d.** Pour tout réel x, $f(x+\pi) = -f(x)$

On a $f(-x) = \sin(-x) - (-x) = -\sin(x) + x = -(\sin(x) - x) = -f(x)$: la fonction est impaire.

Question 2

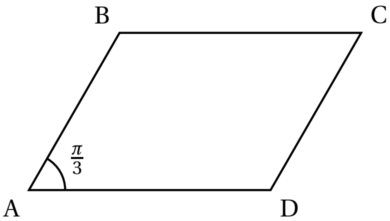
Dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, l'équation $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ a pour solutions :

a. $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$	**b.** $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$	**c.** $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$	**d.** $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

$2\cos(x) - \sqrt{3} = 0 \iff \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: deux solutions : $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$

Question 3

Soit ABCD un parallélogramme tel que :
$AB = 3$, $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$.
Alors $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$ est égal à :



a. 12	**b.** -12	**c.** 6	**d.** -6

On a $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = DA \times DC \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}}\right) = 3 \times 4 \times \cos\frac{2\pi}{3} = 12 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -6$.

Question 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On considère la droite (d_1) d'équation $3x - 4y + 1 = 0$. La droite (d_2) perpendiculaire à (d_1) et passant par le point $A(1\,;\,1)$ a pour équation :

a. $4x+3y=0$	**b.** $4x+3y-7=0$	**c.** $x+y-2=0$	**d.** $-4x+3y+1=0$

La droite (d_1) a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\binom{4}{3}$, donc un vecteur normal à (d_2) est par exemple $\overrightarrow{n_2}\binom{-3}{4}$.
Une équation de d_2 est donc $4x+3y+d=0$ et comme $A(1\,;\,1) \in (d_2)$, on a $4+3+d=0 \iff d=-7$.
Une équation de (d_2) est donc $4x+3y-7=0$.

Question 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Les droites (d) et (d') d'équations respectives $2x - y + 5 = 0$ et $-4x + 2y + 7 = 0$ sont :

a. confondues	**b.** sécantes	**c.** parallèles	**d.** perpendiculaires

En écrivant l'équation de (d') sous la forme $2x - y - \frac{7}{2}$, on voit que (d) et (d') sont parallèles et distinctes.

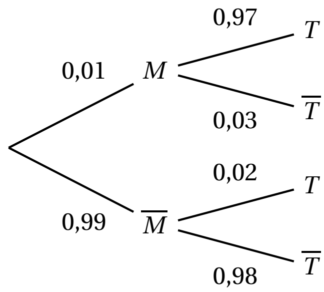
Exercice 2 **5 points**

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au dix millième.

On étudie un test de dépistage pour une certaine maladie dans une population donnée. On sait que 1 % de la population est atteint de la maladie. Des études ont montré que si une personne est malade, alors le test se révèle positif dans 97 % des cas et si une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.
Pour une personne à qui on fait passer le test de dépistage on associe les évènements :

- M : la personne est malade,
- T : le test est positif.

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'exercice.



2. Justifier que $P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}0198$.

On a $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,99 \times 0,02 = 0{,}0198$.

3. Montrer que $P(T) = 0{,}0295$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right)$.

Or $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,01 \times 0,97 = 0{,}0097$.

Donc $P(T) = 0{,}0097 + 0{,}0198 = 0{,}0295$.

4. Calculer $P_T(M)$.

$P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0097}{0{,}0295} \approx 0{,}32881$, soit $0{,}3288$ au dix-millième près.

5. Une personne dont le test se révèle positif est-elle nécessairement atteinte par cette maladie ?

La réponse est non puisque 1 % de la population est malade et que plus de 3 % sont positives au test.

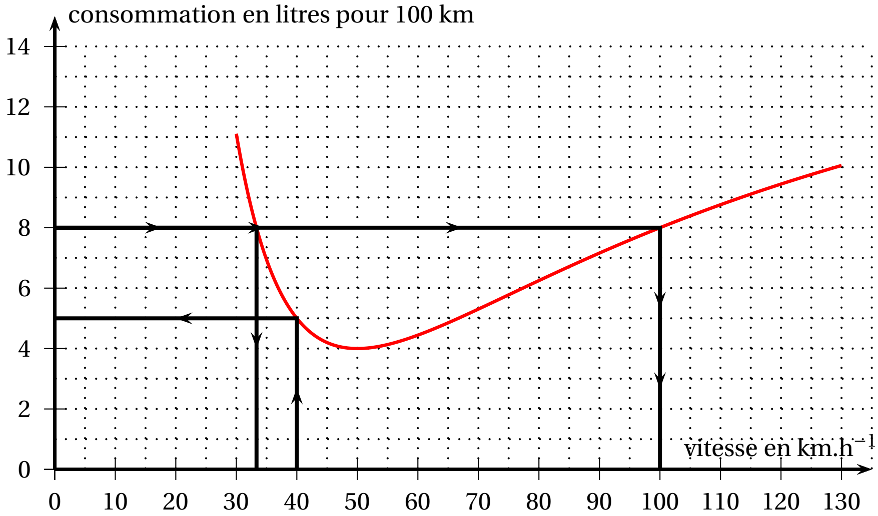
De même une personne malade peut être négative au test :

$P\left(\overline{M} \cap \overline{T} = 0,01 \times 0,03 = 0{,}0003\right) > 0$!

Exercice 3 **5 points**

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

Lecture graphique
Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km.h^{-1} du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km.h^{-1} ?
   On lit environ 5 l.
2. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?
   On lit environ 33,3 km/h ou 100 km/h.
3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ?
   La consommation semble la plus basse à une vitesse de 50 km/h.

Modélisation

Si on note x la vitesse du véhicule en km.h^{-1}, avec $30 \leqslant x \leqslant 130$, la consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1\,600x + 40\,000}{x^2}.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[30\,;\,130]$.

4. Montrer que pour tout $x \in [30\ ;\ 130]$,

$$f'(x) = \frac{800\,(2x - 100)}{x^3}.$$

   u et v étant deux fonctions dérivables et la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ (pour $(u \neq 0)$ étant $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on a donc :
   $f'(x) = \dfrac{x^2 \times (40x - 1600) - 2x\left(20x^2 - 1\,600x + 40\,000\right)}{x^4} = \dfrac{40x^3 - 1\,600x^2 - 40x^3 + 3\,200x^2 - 80\,000x}{x^4} = \dfrac{1\,600x^2 - 80\,000x}{x^3} = \dfrac{800\,(2x - 100)}{x^3}$.
5. Démontrer la conjoncture de la question 3.
   On a $800 > 0$ et la vitesse x étant positive, on a aussi $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $2x - 100$. Or :

   - $2x - 100 < 0 \iff 2x < 100 \iff x < 50$;
   - $2x - 100 > 0 \iff 2x > 100 \iff x > 50$;
   - $2x - 100 = 0 \iff 2x = 100 \iff x = 50$.

   Du signe de la dérivée, on en déduit que f est décroissante pour $x < 50$ et croissante pour $x > 50$: $f(50) = \dfrac{20 \times 50^2 - 1\,600 \times 50 + 40\,000}{50^2} = 36 - 32 = 4$ (l) est le minimum de la fonction.

Exercice 4 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 puis u_{99}.

- $u_0 = \dfrac{2}{1} = 2$;
- $u_1 = \dfrac{3}{2} = 1,5$;
- $u_0 = \dfrac{4}{3}$;
- $u_{99} = \dfrac{101}{100} = 1,01$.

2. **a.** Exprimer, pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ en fonction de n.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 = \dfrac{n+2}{n+1} - 1 = \dfrac{n+2}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+1} = \dfrac{n+2-n-1}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}.$$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+3}{n+2} - \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{(n+3)(n+1)-(n+2)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^2+n+3n+3-n^2-4-4n}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$.

c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Comme $n+1 \geqslant 1 > 0$ et de même $n+2 \geqslant 2 > 0$, le signe de la différence est celui de -1.

Conclusion : $u_{n+1} - u_n < 0$ montre que la suite (u_n) est décroissante à partir de 2.

3. Soit a un nombre réel dans l'intervalle $]1\ ;\ 2]$.

Recopier et compléter sur la copie le programme Python suivant pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant a$, où a est un nombre de l'intervalle $]1\,;\,2]$.

```
Def seuil(a) :
  n = 0
  while (n+2) / (n+1) > a :
  n = n+1
  return n
```