ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2
Corrigé du sujet 62 mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 points**

1. Soit c un nombre réel strictement supérieur à 1. Sur l'ensemble des nombres réels, la fonction polynôme f définie par $f(x) = x^2 + 2x + c$.

a. change de signe exactement 2 fois	**b.** change de signe exactement une fois	**c.** est toujours positive	**d.** est toujours négative .

   On a $f(x) = (x+1)2 - 1 + c = (x+1)^2 + c - 1$.
   Comme $c > 1 \Rightarrow c - 1 > 0$ et comme quel que soit le réel x; $(x+1)^2 \geqslant 0$ il en résulte que $(x+1)^2 + c - 1 > 0$: ce trinôme est donc strictement positif.

2. Si x est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;0]$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$ alors $\sin x$ a pour valeur
   On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.
   Or sur $[-\pi\,;0]$, on a $\sin x < 0$, donc $\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

3. Le quadrilatère ABCD est un carré. On a :
   Les côtés [AB] et [AD] sont perpendiculaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

4. La droite d'équation $2x - y + 1 = 0$ coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées :
   La droite coupe l'axe des abscisses en un point d'ordonnée nulle, donc en remplaçant dans l'équation de la droite y par 0, on a $2x + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$. Réponse **d.**

5. Pour tout réel x, $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{x+x} = e^{2x} = (e^x)^2$.

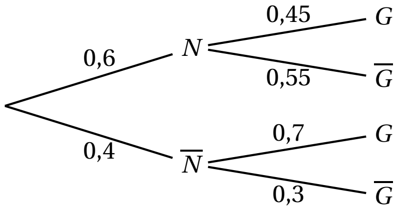
EXERCICE 2 **5 points**

Un biologiste étudie une population de bactéries dans un milieu fermé. À l'instant initial, il y a 10 000 bactéries et la population augmente de 15 % par heure.
On modélise la situation par une suite (u_n) pour laquelle, pour tout entier naturel n, u_n représente une estimation du nombre de bactéries au bout de n heures.
On a donc $u_0 = 10000$.

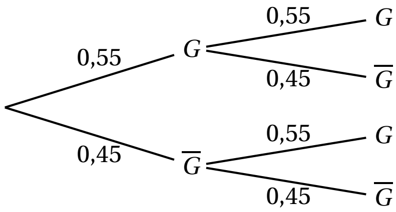
1. Augmenter de 15 % revient à multiplier par $1 + \dfrac{15}{100} = 1 + 0,15 = 1,15$.
   Donc on passe de la population l'année n à celle de l'année $n+1$ en la multipliant par 1,15, soit $u_{n+1} = u_n \times 1,15$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10000$ et de raison 1,15.
   On sait qu'alors quel que soit le naturel n, $u_n = 10000 \times 1,15^n$.
2. Question un peu tardive...
3. Au bout de 10 heures il y aura : $u_{10} = 10000 \times 1,15^{10} \approx 40455,6$ soit environ 40 456 bactéries.
4. Ces résultats montrent que la modélisation choisie ne veut rien dire : en un peu plus d'un an les bactéries auraient envahi le laboratoire...
5. La diminution en pourcentage est : $\dfrac{200000 - 4000}{200000} \times 100 = \dfrac{200 - 4}{200} \times 100 = \dfrac{196}{200} \times 100 = \dfrac{196}{2} = 98$ (%).

EXERCICE 3 **5 points**

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant cette situation.



2. On a $p(N \cap G) = p(N) \times p_N(G) = 0,6 \times 0,45 = 0,27$.
3. On a de même $p\left(\overline{N} \cap G\right) = p\left(\overline{N}\right) \times p(G) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(G) = p(N \cap G) + p\left(\overline{N} \cap G\right) = 0,27 + 0,28 = 0,55$.
4. Il faut trouver $p_{\overline{G}}(N) = \dfrac{p\left(\overline{G} \cap N\right)}{p\left(\overline{G}\right)} = \dfrac{0,6 \times 0,55}{0,45} = \dfrac{0,33}{0,45} = \dfrac{33}{45} = \dfrac{11}{15} \approx 0,733$.
5. On peut dresser un arbre représentant les résultats des deux combats :



   On a $p(G \cap G) = 0,55 \times 0,55 = 0,302\,5$;
   $p\left(\overline{G} \cap \overline{G}\right) = 0,45 \times 0,45 = 0,202\,5$.
   Il reste donc pour la probabilité d'une victoire et une défaite (ou inversement) : $1 - (0,302\,5 + 0,202\,5) = 1 - 0,505 = 0,495$. D'où le tableau de la loi de probabilité de X :

valeur de X : x_i	0	1	2
$p\,(X = x_i)$	0,202 5	0,495	0,302 5

EXERCICE 4 **5 points**

$$f(x) = 35\text{e}^{-0,22x}.$$

1. marché ? On a $f(0) = 35 \times \text{e}^{-0,22\times 0} = 35 \times 1 = 35$
   À sa mise sur le marché la voiture est vendue 35 000 €.
2. 5 ans et 6 mois correspondent à la valeur $x = 5,5$.
   On a $f(5,5- = 35 \times \text{e}^{-0,22\times 5,5} = 35 \times \text{e}^{-1,21} \approx 10,436\,9 \approx 10\,437\ E$.
3. La donction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 35 \times (-0,22)\text{e}^{-0,22x} = -7,7\text{e}^{-0,22x}$.
4. On sait que, quel que soit le réel x, $\text{e}^{-0,22x} > 0$, donc $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0\,;\,10]$ de $f(0) = 35$ à $f(10) = 35 \times \text{e}^{-0,22\times 10} = 35 \times \text{e}^{-2,2} \approx 3,878\,1$ (3 878 €).
5. En programmant sur la calculatrice les valeurs de la fonction $x \longmapsto f(x) = 35\text{e}^{-0,22x}$, on obtient :
   $f(5,6) \approx 10,21$ et $f(5,7) \approx 9,987\,6$.
   Or 5,6 ans $\approx$ 5 ans et 7,2 mois et 5,7 ans $\approx$ 5 ans et 8,4 mois.
   Or 5 ans et 8 mois valent $5 + \dfrac{8}{12} = 5 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{17}{3}$.
   $f\left(\dfrac{17}{3}\right) \approx 10,061\,1$, donc le client vendra sa voiture au bout de 5 ans et 9 mois.