

Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S La Réunion ∞
15 juin 2006

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1. a. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0_+$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$.

- b. f quotient de fonctions dérivables, celle du dénominateur ne s'annulant pas, est dérivable et $f'(x) = \frac{\ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ qui est du signe de $\ln x - 1$.

Des propriétés de la fonction \ln , on en déduit que $\ln e = 1$ et comme cette fonction est croissante sur \mathbb{R}_+ , on en déduit le signe de la dérivée et le tableau de variations suivant :

x	1	e	$+\infty$
f'		-	+
f	$+\infty$	e	$+\infty$

2. a.

La suite semble converger « rapidement ».

- b. On a $u_0 = 5 \geq e$. Pour $n > 0$, u_n est une image par f d'un réel. D'après le tableau de variations ci-dessus, $f(x) \geq e \iff u_n \geq e$.

- c. On calcule $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$.

On vient de voir que $u_n \geq e > 1 \implies \ln u_n > 0$. La différence est donc du signe de $1 - \ln u_n$ qui est négative d'après la question 1 b.

$u_{n+1} - u_n < 0 \iff (u_n)$ est une suite décroissante. C'est une suite décroissante et minorée par e : elle converge vers une limite $\ell \geq e$.

Partie B

1. Or l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ donne à la limite $\ell = f(\ell)$, car la fonction f est continue sur $]1; +\infty[$.

2. $\ell = f(\ell) \iff \ell = \frac{\ell}{\ln \ell} \iff (\text{car } \ell \neq 0), 1 = \frac{1}{\ln \ell} \iff \ln \ell = 1 \iff \ell = e$.

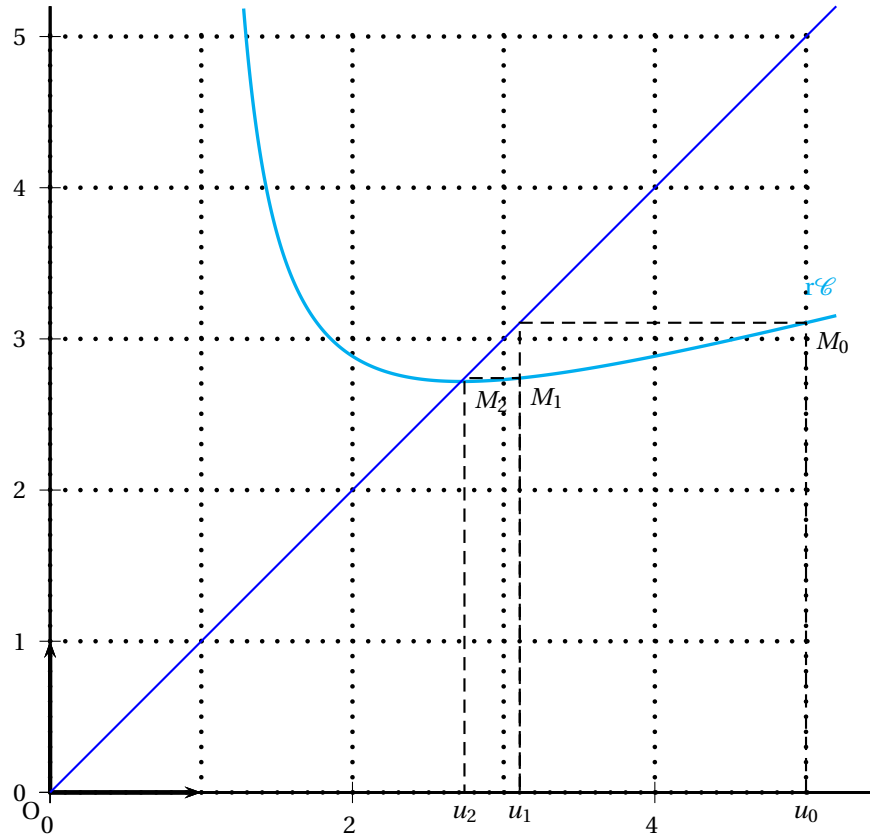
La suite converge vers e .

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Première partie



En intégrant par parties avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v'(x) &= e^x \\ u'(x) &= 1 & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

Les fonctions u et v étant dérivables et les fonctions u' et v' continues, on obtient :

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = [e^x(x-1)]_0^1 = 0 - 1 \times (-1) = 1.$$

Deuxième partie

1. L'aire de la partie A est en unités d'aire l'intégrale calculée ci-dessus soit 1. L'aire du rectangle est e donc par différence l'aire de la partie B est $e - 1$. On sait que le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

	A	B	Total
aire	1	$e - 1$	e
Probabilité			$\frac{1}{2e}$

On en déduit aussitôt que la probabilité d'atteindre la partie A est $\frac{1}{2e}$ et que la probabilité d'atteindre la partie B est $\frac{e-1}{2e}$.

2. a. On effectue trois fois la même expérience aléatoire avec comme succès : « atteindre la partie A » de probabilité $\frac{1}{2e}$ et comme échec : « rater la partie A ». On a donc une loi de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2e}$.

L'espérance est $E(X) = n \times p = 3 \times \frac{1}{2e} = \frac{3}{2e} \approx 0,552$.

b. On a $p(E) = p(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2e}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2e}\right) = \frac{3 \times 1 \times (2e - 1)}{8e^3} \approx 0,083$ à 10^{-3} par excès.

c. On considère de même la loi de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et

$$p = \frac{e-1}{2e}.$$

$$\text{On sait que } p(F) = \binom{3}{3} \times \left(\frac{e-1}{2e}\right)^3 = \frac{(e-1)^3}{8e^3}.$$

d. Soit G l'évènement : « les trois fléchettes ont atteint la partie A ou la partie B ».

$$p(G) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

$$\text{On sait que } p_G(F) = \frac{p(F \cap G)}{p(G)} = \frac{p(F)}{p(G)} = \frac{\frac{(e-1)^3}{8e^3}}{\frac{1}{8}} = \frac{(e-1)^3}{e^3} \approx 0,253.$$

3. a. On a $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$.

$$p(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2e}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^n.$$

$$\text{Finalement : } p(X \geq 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^n.$$

b. $p_n \geq 0,99 \iff 1 - \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^n \geq 0,99 \iff \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^n \leq 0,01 \iff$

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{2e}\right) \leq \ln 0,01 \iff n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln\left(1 - \frac{1}{2e}\right)}, \text{ (puisque } \ln\left(1 - \frac{1}{2e}\right) < 0).$$

$$\text{D'où finalement, puisque } \frac{\ln 0,01}{\ln\left(1 - \frac{1}{2e}\right)} \approx 22,7, \text{ le plus petit entier } n \text{ tel que}$$

$$p_n \geq 0,99 \text{ est l'entier } 23.$$

EXERCICE 3

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$1. \frac{z-4}{z} = i \iff z-4 = iz \iff z(1-i) = 4 \iff z = \frac{4}{1-i} = \frac{4(1+i)}{1+1} = 2+2i.$$

$$S = \{2+2i\}$$

$$2. z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z-1)^2 = -3 \iff \begin{cases} z_1 = 1+i\sqrt{3} \\ z_2 = 1-i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$S = \{1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\}.$$

$$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2 \implies z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et comme } z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

3. En interprétant l'égalité de la question 1 obtenue avec l'affixe de D (modules et arguments égaux) :

$$\frac{z-4}{z} = i \iff \frac{z_D - z_B}{z_D - z_O} = i \implies \begin{cases} \overline{BD} & = \overline{OD} \\ \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BD}\right) & = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ Autrement dit le tri-}$$

angle OBD est isocèle, rectangle en D.

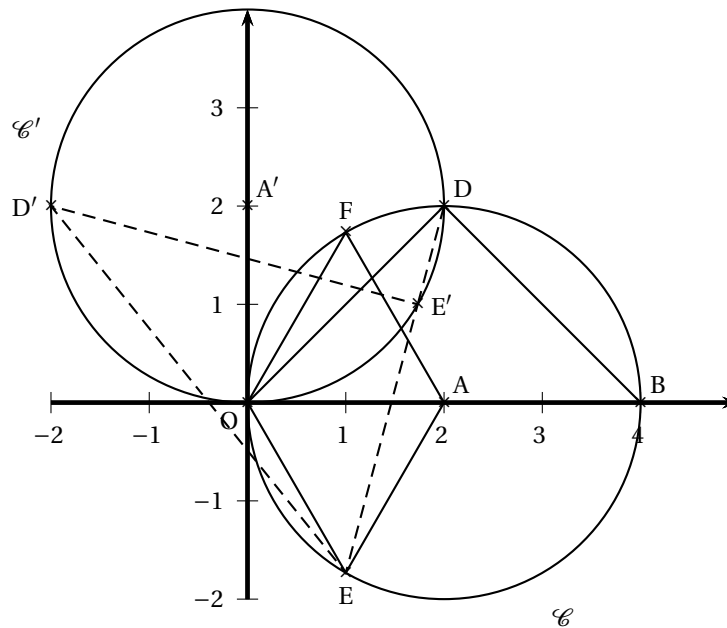
4. On remarque que z_E et z_F sont les solutions de l'équation de la question 2.

$$\text{Donc : } \begin{cases} z_E^2 - 2z_E + 4 = 0 \\ z_F^2 - 2z_F + 4 = 0 \end{cases} \implies z_E^2 - z_F^2 - 2z_E + 2z_F = 0 \iff (z_E - z_F)(z_E + z_F - 2) = 0$$

$$0 \iff z_E + z_F = 2 = z_A \iff \text{OEAF est un parallélogramme.}$$

De plus on sait que $|z_E| = |z_F| = 2$. Conclusion : OEAF est un losange.

5. a. Si $M(z)$ a pour image $M'(z')$ dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors $z' = iz$. Donc $z_{E'} = i(1 - i\sqrt{3}) = \sqrt{3} + i$.
- b. $AE' = |z_{E'} - z_A| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2$. Donc E' appartient bien au cercle \mathcal{C}' .
- c. On calcule $e' - d = \sqrt{3} + i - 2 - 2i = \sqrt{3} - 2 - i$. Donc $(\sqrt{3} + 2)(e' - d) = (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2 - i) = -1 - i(\sqrt{3} + 2)$.
 D'autre part $e - d = 1 - i\sqrt{3} - 2 - 2i = -1 - i(\sqrt{3} + 2)$.
 Conclusion : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. Cette égalité s'écrit vectoriellement : $\overrightarrow{DE} = (\sqrt{3} + 2)\overrightarrow{DE'} \iff \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DE'}$ sont colinéaires ou encore E appartient à la droite (DE') ou encore E, E' et D sont alignés.
6. Dans la rotation, la droite (ED) ou encore d'après la question précédente la droite (EE') a pour image la droite perpendiculaire $(E'D')$: donc le triangle $EE'D'$ est rectangle en E' .



EXERCICE 3

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Avec $s(A) = I$ et $s(B) = J$, le rapport de la similitude est $\frac{IJ}{AB} = \frac{1}{2}$.
 De même l'angle de la similitude est à 2π près $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}) = +\frac{\pi}{2}$.
2. Si Ω est le centre de la similitude, $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = +\frac{\pi}{2}$ et de même $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega J}) = +\frac{\pi}{2}$, donc Ω appartient au cercle Γ_1 et au cercle Γ_2 , donc Ω est l'un des deux points communs à ce cercle.
3. L'image de la droite (BC) est la droite contenant J (image par s de B) et perpendiculaire à (BC) , d'après l'angle de la similitude : c'est donc la droite (CD) .
 Donc C' image de C par s appartient à la droite (CD) et comme $s(B) = J$ et $s(C) = C'$, $JC' = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CD$. Donc on a $C' = C$ ou $C' = D$. Comme C n'est pas le point invariant de la similitude soit Ω , $C' = D$.
 Il en résulte que puisque I milieu de $[AC]$, alors son image K par s est le milieu du segment image $[ID]$.

4. a. $s = h \circ h$ composée de deux similitudes de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est une similitude de même centre Ω , de rapport $\frac{1}{4}$ et d'angle π , soit une homothétie de rapport $-\frac{1}{4}$.
- b. $s(A) = h[h(A)] = h(I) = K$. Dans une homothétie un point, son image et le centre sont alignés, donc A, K et Ω sont alignés.

Partie B

1. I a pour affixe $1 + i$ et J a pour affixe $1 + 2i$.

L'écriture complexe d'une similitude directe est $z' = az + b$. On a donc :

$$\begin{cases} 1+i &= a \times 0 + b \\ 1+2i &= a \times 2 + b \end{cases} \Rightarrow i = 2a \Leftrightarrow a = \frac{i}{2} \text{ et } b = 1+i.$$

L'écriture de la similitude est donc : $z' = \frac{1}{2}iz + 1+i$.

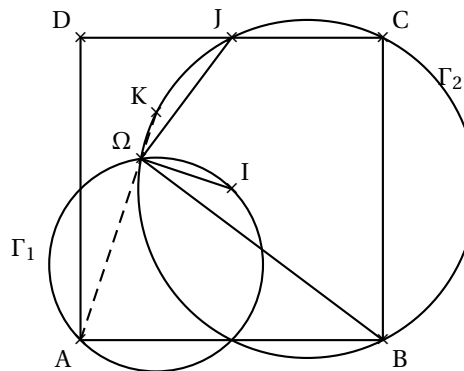
2. Ω d'affixe ω invariant par $s \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}i\omega + 1+i \Leftrightarrow \omega\left(1 - \frac{1}{2}i\right) = 1+i \Leftrightarrow$

$$\omega = \frac{1+i}{1 - \frac{1}{2}i} = \frac{1 - \frac{1}{2} + i\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{\frac{5}{4}} = \frac{2+6i}{5}.$$

3. Soit e l'affixe de E; on a $0 = \frac{1}{2}ie + 1+i \Leftrightarrow \frac{1}{2}ie = -1-i \Leftrightarrow e = \frac{-1-i}{\frac{1}{2}i} =$

$$\frac{-i + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -2 + 2i.$$

E
x



EXERCICE 4

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. On a $d(O; \mathcal{P}) = \frac{|-1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}$ Faux

b. Vrai

c. Vrai : le vecteur $2\vec{n}(2; 3; 4)$ est un vecteur normal au plan.

d. Le vecteur $\vec{p}(-5; 2; 1)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{Q} .

Et $2\vec{n} \cdot \vec{p} = -10 + 6 + 4 = 0$. Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans ne sont pas parallèles mais perpendiculaires. Faux

2. a. P admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(2; 1; -1)$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 4 + 2 = 0$. Ces vecteurs sont orthogonaux donc la droite est bien parallèle au plan. Vrai
- b. Faux car \vec{n} et \vec{u} ne sont pas colinéaires.
- c. On sait que D est parallèle au plan. $A \in P \iff 2 + 1 - 1 = 0$ est une égalité fautive, donc la droite D n'est pas incluse dans le plan. Faux
- d. Le système proposé est bien la traduction de l'égalité vectorielle $\vec{AM} = \alpha \vec{u}$. Vrai
3. a. Les deux plans ont pour vecteurs respectifs normaux $\vec{v}(1; 1; 1)$ et $\vec{w}(1; 0; -1)$ d'où $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 - 1 = 0$. Les deux plans sont orthogonaux, leur intersection est donc une droite. Faux
- b. On a effectivement $1 + 1 + 1 = 3$ et $2 - 1 = 1$, donc l'ensemble E est bien une droite contenant A . Vrai
- c. Faux
- d.
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x = 1 + z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 - z \\ x = \frac{1 + z}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{5 - 3z}{2} \\ x = \frac{1 + z}{2} \end{cases}$$
L'ensemble des points de E est donc l'ensemble des points de coordonnées $\left(\frac{1+z}{2}; \frac{5-3z}{2}; z\right)$. L'équation paramétrique de cette droite est donc :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \\ y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}z \\ z = z \end{cases} \text{ En posant } z = 2t, \text{ on obtient le système :}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \frac{5}{2} - 3t \\ z = 0 + 2t \end{cases} \text{ Cette équation est celle de la droite contenant}$$

$$B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 0\right) \text{ et de vecteur directeur } (1; -3; 2). \text{ Vrai.}$$
4. a. Faux (difficile à justifier)
- b. (AH) est orthogonale à (BC) donc appartient aussi au plan P . Vrai
- c. $\vec{BM} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BC} \iff \vec{BC} \cdot (\vec{BM} - \vec{BA}) = 0 \iff \vec{BC} \cdot \vec{AM} = 0$.
L'ensemble des points M est donc le plan contenant A et orthogonal à (BC) : c'est bien le plan P . Vrai.
- d. Faux : La face (ABC) étant quelconque la hauteur $[AH]$ n'est pas la médiane relative à $[BC]$.