

✎ Corrigé du baccalauréat C Rouen ✎

juin 1983

EXERCICE 2

4 POINTS

Les suites $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels sont définies par :

$$\begin{cases} U_0 &= 5 \\ U_1 &= 31 \\ U_{n+2} &= 12U_{n+1} - 35U_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0 &= -1 \\ V_1 &= -11 \\ V_{n+2} &= 12V_{n+1} - 35V_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Les suites $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont alors définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = U_n + V_n \quad \text{et} \quad Y_n = U_n - V_n.$$

1. On a $X_0 = 5 - 1 = 4$ et $X_1 = 31 - 11 = 20$.

On voit que $X_1 = 5X_0$: il semble donc que la suite X soit une suite géométrique de raison 5. C'est ce que l'on démontre par récurrence :

Initialisation : on a bien $X_1 = 5X_0$;

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_{n+1} = 5X_n$.

$$\text{Alors } X_{n+2} = U_{n+2} + V_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n + 12V_{n+1} - 35V_n =$$

$$12(U_{n+1} + V_{n+1}) - 35(U_n + V_n) = 12X_{n+1} - 35X_n = 12 \times 5X_n - 35X_n = 25X_n = 5 \times 5X_n = 5X_{n+1}.$$

Conclusion : au rang 0, on a $X_1 = 5X_0$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_{n+1} = 5X_n$, alors $X_{n+2} = 5X_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout naturel n , $X_{n+1} = 5X_n$, donc que la suite X est une suite géométrique de raison 5.

2. *Initialisation* : On a $Y_0 = 6$ et $Y_1 = 42$.

On a donc $Y_1 = 7Y_0$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Y_{n+1} = 7Y_n$.

On démontre de la même façon que la suite Y est une suite géométrique de raison 7.

Quel que soit le naturel n , $Y_{n+1} = 7Y_n$.

$$\text{Alors } Y_{n+2} = U_{n+2} - V_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n - 12V_{n+1} + 35V_n = 12(U_{n+1} - V_{n+1}) - 35(U_n - V_n) =$$

$$12Y_{n+1} - 35Y_n = 12Y_{n+1} - 5 \times 7Y_n = 12Y_{n+1} - 5Y_{n+1} = 7Y_{n+1}.$$

La conclusion est la même; donc la suite Y est une suite géométrique de raison 7.

3. On sait que $X_n = X_0 \times 5^n = 4 \times 5^n$;

De même $Y_n = 6 \times 7^n$.

$$\text{On a donc le système : } \begin{cases} U_n + V_n &= 4 \times 5^n \\ U_n - V_n &= 6 \times 7^n \end{cases}$$

Par somme et par différence de ces deux équations on obtient :

$$2U_n = 4 \times 5^n + 6 \times 7^n \iff X_n = 2 \times 5^n + 3 \times 7^n \text{ et}$$

$$2V_n = 4 \times 5^n - 6 \times 7^n \iff Y_n = 2 \times 5^n - 3 \times 7^n$$

4. $U_{n+1} - 5U_n = 2 \times 5^{n+1} + 3 \times 7^{n+1} - 2 \times 2 \times 5^n - 5 \times 3 \times 7^n = 3 \times 7^n (7 - 5) = 2 \times 3 \times 7^n.$

$$U_{n+1} - 5U_n = 2 \times 3 \times 7^n \quad (1).$$

De même $7U_n - U_{n+1} = 7 \times 2 \times 5^n + 7 \times 3 \times 7^n - 2 \times 5^{n+1} - 3 \times 7^{n+1} = 2 \times 5^n (7 - 5) = 2 \times 2 \times 5^n.$

$$7U_n - U_{n+1} = 4 \times 5^n \quad (2)$$

Si d_n est un diviseur commun à U_n et à U_{n+1} , il divise $U_{n+1} - 5U_n$ et $7U_n - U_{n+1}$.

L'égalité (1) montre que d_n divise 2, ou 3 ou 7^n , mais l'égalité (2) montre que d_n ne divise ni 3, ni 5^n .

De même l'égalité (2) montre que d_n divise 2 ou 4 ou 5^n , mais l'égalité (1) montre ensuite que d_n n'est pas un diviseur de 4 ni de 5^n .

Conclusion : les seuls diviseurs de d_n sont 1 et 2. Or $U_n = 2 \times 5^n + 3 \times 7^n$ somme d'un pair et d'un impair est impair. Donc d_n ne peut être égal à 2.

Conclusion $d_n = 1$: le P. G. C. D. de U_n et de U_{n+1} est égal à 1 : les deux nombres U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux