Corrigé du BTS Métropole – mai 2022
Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

Exercice 1 — 5 points

Question 1

Soit a et b des entiers naturels tels que $a \equiv 2\,[7]$ et $b \equiv 4\,[7]$.

À quelle valeur $(a+b)^{2022}$ est-il congru modulo 7 ?

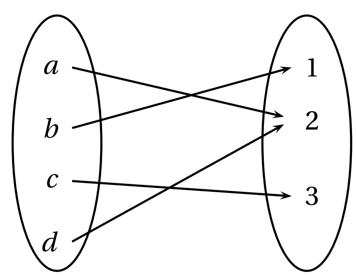
A : 1 **B :** 6 **C :** 4 **D :** -4

> $a \equiv 2\,[7]$ et $b \equiv 4\,[7]$ donc $a+b \equiv 2+4\,[7]$ c'est-à-dire $a+b \equiv 6\,[7]$.
> Or $6 \equiv -1\,[7]$ donc $a+b \equiv -1\,[7]$.
> On en déduit que $(a+b)^{2022} \equiv (-1)^{2022}\,[7]$ donc que $(a+b)^{2022} \equiv 1\,[7]$.
>
> **Réponse A**

Question 2

Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$ et $F = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ deux ensembles.

Soit f l'application de E dans F définie par le diagramme suivant :



A : f est injective et non surjective.

B : f est surjective et non injective.

C : f est bijective.

D : f est non injective et non surjective.

> - $f(a) = f(d) = 2$ donc f n'est pas injective.
> - Tout élément de F admet un antécédent par f dans E donc f est surjective.
>
> **Réponse B**

Question 3

Soit le nombre 343 écrit en base dix. Son écriture en base seize est :

A : 217 **B :** A3C **C :** F7 **D :** 157

$343 = 1 \times 16^2 + 5 \times 16 + 7 = \overline{157}^{16}$

Réponse D

Question 4

Soit n un entier relatif.

On considère l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & n \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -22 \\ 3 & -18 \end{pmatrix}$.

Elle est vérifiée pour :

A : $n = -3$ **B :** $n = 4$ **C :** $n = -6$ **D :** $n = 5$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & n \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2+4n \\ 3 & -12+n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 14 & 2+4n \\ 3 & -12+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -22 \\ 3 & -18 \end{pmatrix} \iff n = -6$

Réponse C

Question 5

Soit P la proposition : « *Si la télévision est allumée alors quelqu'un la regarde.* »

Parmi les expressions suivantes laquelle est équivalente à P ?

A : Si la télévision n'est pas allumée alors personne ne la regarde.

B : Si la télévision est allumée alors personne ne la regarde

C : Si personne ne regarde la télévision alors la télévision n'est pas allumée.

D : Si personne ne regarde la télévision alors la télévision est allumée.

Il s'agit d'une contraposée : $\left[p \implies q\right]$ équivaut à $\left[(\text{non } q) \implies (\text{non } p)\right]$.

Réponse C

Exercice 2 5 points

1. Les nombres premiers inférieurs à 25 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23.
2. Pour voir si le nombre 623 est un nombre premier, on le divise par tous les nombres premiers inférieurs à 623 dont le carré est inférieur ou égal à 623.
   - $623 = 2 \times 311 + 1$ donc 623 n'est pas divisible par 2.
   - $623 = 3 \times 207 + 2$ donc 623 n'est pas divisible par 3.
   - $623 = 5 \times 124 + 3$ donc 623 n'est pas divisible par 5.
   - $623 = 7 \times 89$ donc 623 n'est pas un nombre premier.

3. $105 = 3 \times 5 \times 7$

- Les diviseurs de 3×5 sont : 1, 3, 5 et 15.
- Les diviseurs de $3 \times 5 \times 7$ sont : 1, 3, 5 et 15, puis 1×7, 3×7, 5×7 et 15×7.

Les diviseurs de 105 sont donc : 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 et 105.

4. On considère l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel où Div désigne une fonction de paramètre Nbre, Nbre étant un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Algorithme en langage naturel :

```
Fonction Div(Nbre)
    Test ← 0
    Pour i allant de 1 à Nbre Faire
      Si le reste de la division de Nbre par i est égal à 0 Faire
        Test ← Test + 1
      Fin de Si
    Fin de Pour
    Retourner Test
```

a. On fait tourner la fonction Div en prenant 6 pour valeur de Nbre.

- Au début, Test = 0.
- Pour i = 1 : le reste de la division de 6 par 1 est 0, donc on ajoute 1 à la variable Test qui vaut maintenant 1.
- Pour i = 2 : le reste de la division de 6 par 2 est 0, donc on ajoute 1 à la variable Test qui vaut maintenant 2.
- Pour i = 3 : le reste de la division de 6 par 3 est 0, donc on ajoute 1 à la variable Test qui vaut maintenant 3.
- Pour i = 4 : le reste de la division de 6 par 4 n'est pas 0, donc on ne fait rien.
- Pour i = 5 : le reste de la division de 6 par 5 n'est pas 0, donc on ne fait rien.
- Pour i = 6 : le reste de la division de 6 par 6 est 0, donc on ajoute 1 à la variable Test qui vaut maintenant 4.
- La fonction renvoie le nombre 4.

La fonction Div compte le nombre de diviseurs de la variable Nbre à laquelle elle est appliquée.

b. On veut écrire une fonction Prem de paramètre Nbre, où Nbre est un nombre entier supérieur ou égal à 2, qui renvoie Vrai (ou True) si Nbre est premier, Faux (ou False) si Nbre n'est pas premier.

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 est premier si et seulement si le nombre de ses diviseurs est égal à 2 ; il suffit donc de tester la valeur de la variable Test en fin d'algorithme.

```
Fonction Prem(Nbre)
    Test ← 0
    Pour i allant de 1 à Nbre Faire
        Si le reste de la division de Nbre par i est égal à 0 Faire
            Test ← Test + 1
        Fin de Si
    Fin de Pour
    Si Test = 2
        Alors Afficher Vrai
        Sinon Afficher Faux
    Fin de Si
```

Exercice 3 — 10 points

Partie A

Un professeur de lycée souhaite aménager une salle de cours en salle vidéo pour l'option cinéma. Le professeur, responsable du projet, définit les tâches à réaliser avec leur durée.

Le tableau suivant regroupe l'ensemble de ces données.

Tâche à réaliser	Repère	Durée en semaines	Tâches précédentes
Acceptation du projet par l'administration.	A	2	
Acceptation du projet par la région.	B	3	
Préparation de la salle.	C	6	A
Câblage électrique de la salle.	D	7	C, E
Choix du matériel vidéo.	E	4	A, B
Commande du matériel vidéo.	F	6	E
Installation du matériel vidéo.	G	2	D, F
Test et réglage du matériel vidéo.	H	1	G

Le but de cet exercice est d'ordonner la réalisation de ces tâches de façon à ce que la salle soit disponible le plus rapidement possible.

On considère le graphe orienté correspondant aux conditions d'antériorité données par le tableau précédent.

Les sommets A, B, C, D, E, F, G et H représentent les repères des tâches à réaliser.

1. On détermine le niveau de chacun des sommets du graphe.

On part du tableau des prédécesseurs.

On cherche les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de A et de B.

Les sommets A et B sont donc de niveau 0.

Sommets	Prédécesseurs
A	
B	
C	A
D	C - E
E	A - B
F	E
G	D - F
H	G

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 0, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de C et E.

Les sommets C et E sont donc de niveau 1.

Sommets	Prédécesseurs
~~A~~	
~~B~~	
C	~~A~~
D	C - E
E	~~A~~ - ~~B~~
F	E
G	D - F
H	G

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 1, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de D et F.

Les sommets D et F sont donc de niveau 2.

Sommets	Prédécesseurs
~~A~~	
~~B~~	
~~C~~	~~A~~
D	~~C~~ - ~~E~~
~~E~~	~~A~~ - ~~B~~
F	~~E~~
G	D - F
H	G

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 2, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de G.

Le sommet G est donc de niveau 3.

Il reste le sommet H qui est donc de niveau 4.

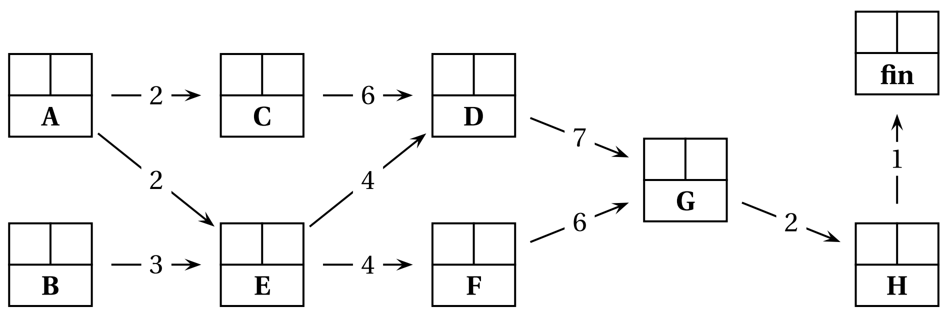
Sommets	Prédécesseurs
~~A~~	
~~B~~	
~~C~~	~~A~~
~~D~~	~~C~~ - ~~E~~
~~E~~	~~A~~ - ~~B~~
~~F~~	~~E~~
G	~~D~~ - ~~F~~
H	G

Niveaux	0	1	2	3	4
Sommets	A - B	C - E	D - F	G	H

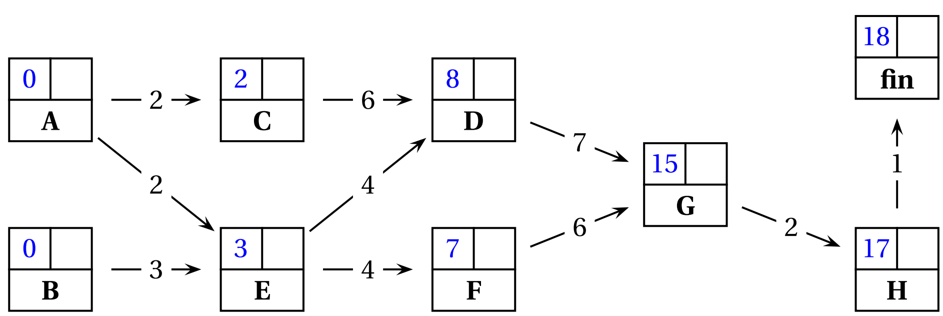
2. On donne le tableau des successeurs de chacun des sommets du graphe.

Sommets	Prédécesseurs	Successeurs
A		C - E
B		E
C	A	D
D	C - E	G
E	A - B	D - F
F	E	G
G	D - F	H
H	G	

3. On construit par étapes le graphe d'ordonnancement du projet (méthode M. P. M.) ; pour cela on construit le graphe par niveaux en rajoutant une tâche fictive « fin ».

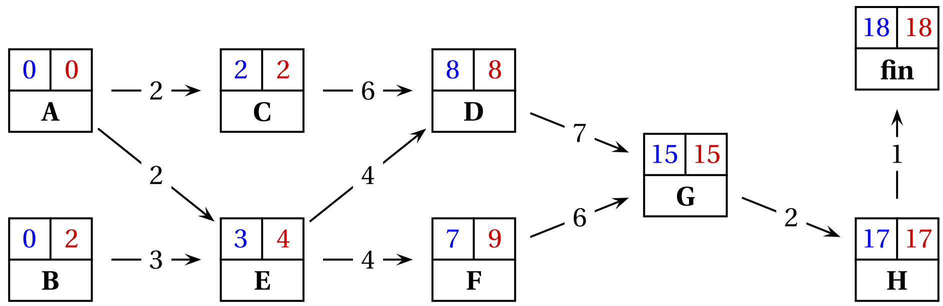


4. Pour déterminer pour chaque tâche les « dates au plus tôt », on traite les sommets par niveaux en partant du début. Puis pour chaque sommet, on note la date qui est la longueur du plus **long** chemin depuis le début.



Ce graphe donne la durée minimale du projet qui est de 18 semaines.

Pour déterminer pour chaque tâche les « dates au plus tard », on traite les sommets par niveaux en partant de la fin et en marquant 18 pour le sommet « fin ». La date « au plus tard » d'une tâche s'obtient en retirant de la date au plus tard de la tâche qui lui succède sa propre durée. S'il y a plusieurs successeurs, on garde la date la plus **petite**.



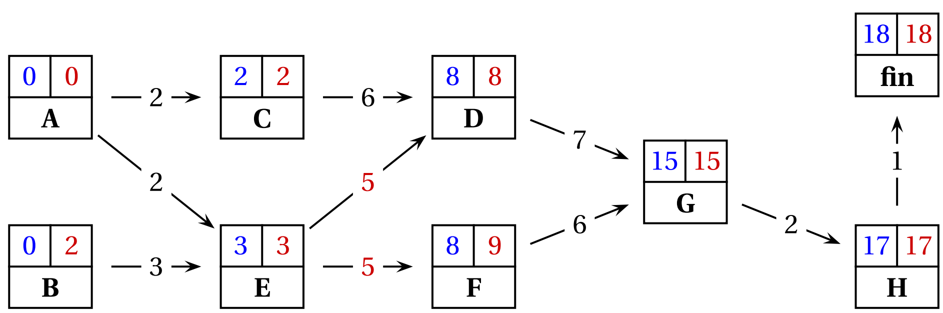
5. Le chemin critique passe par les sommets pour lesquels les dates « au plus tôt » et « au plus tard » coïncident.

   Le chemin critique est donc : A $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ H $\longrightarrow$ fin.

   La durée minimale de réalisation du projet est de 18 semaines.
6. La tâche E prend une semaine de retard.

   La tâche E n'est pas dans le chemin critique; de plus il y a une semaine de décalage entre la date « au plus tôt » et la date « au plus tard » de E. Donc la semaine de retard de E n'aura aucune incidence sur la durée totale de ce projet.

   On peut également refaire le graphe d'ordonnancement en considérant que la tâche E se réalise en 5 semaines et plus en 4 semaines.



On arrive heureusement à la même conclusion.

Partie B

Le gestionnaire du lycée considère que le projet est envisageable lorsqu'il satisfait à l'une au moins des conditions suivantes :

- Le matériel vidéo est acheté dans un magasin local et est de fabrication française.
- Le matériel vidéo n'est pas de fabrication française et il coûte moins de 500 euros;
- Le matériel vidéo n'a pas été acheté dans un magasin local, est de fabrication française et a coûté moins de 500 euros.

On définit les variables a, b, c de la façon suivante :

- a le matériel vidéo coûte moins de 500 euros et $\overline{a}$ le matériel vidéo coute 500 euros ou plus;
- b le matériel vidéo est acheté dans un magasin local et $\overline{b}$ le matériel vidéo n'est pas acheté dans un magasin local.
- c le matériel vidéo est de fabrication française et $\overline{c}$ le matériel vidéo n'est pas de fabrication française.

1. On écrit une expression booléenne E traduisant que le projet est envisageable, à l'aide des variables booléennes a, b, c.

- Le matériel vidéo est acheté dans un magasin local et est de fabrication française correspond à $b.c$.
- Le « ou » se traduit par $+$.
- Le matériel vidéo n'est pas de fabrication française et il coûte moins de 500 euros correspond à $\overline{c}.a$.
- Le « ou » se traduit par $+$.
- Le matériel vidéo n'a pas été acheté dans un magasin local, est de fabrication française et a coûté moins de 500 euros correspond à $\overline{b}.c.a$.

Donc : $E = b.c + a.\overline{c} + a.\overline{b}.c$.

2. **a.** On représente l'expression E dans un tableau de Karnaugh.

$b.c$

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1			1	

$a.\overline{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1			1

$a.\overline{b}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		1		

$E = b.c + a.\overline{c} + a.\overline{b}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	1

On en déduit une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	1

a

$b.c$

Donc $E = a + b.c$.

b. Le projet est envisageable lorsqu'il satisfait à l'une au moins des conditions suivantes :

- le matériel vidéo coûte moins de 500 euros (qui correspond à a) ;
- le matériel vidéo est acheté dans un magasin local, et il est de fabrication française (qui correspond à $b.c$).

3. Dans le projet présenté, le matériel vidéo coûte plus de 500 euros, n'est pas de fabrication française mais sera acheté localement.

Cela correspond à $\overline{a}.\overline{c}.b$ soit $\overline{a}.b.\overline{c}$.

On place, au moyen d'une croix rouge, cet événement dans la table de Karnaugh représentant E :

a \ bc	00	01	11	10
0			1	×
1	1	1	1	1

On peut en conclure que ce projet n'est pas envisageable.