Corrigé du baccalauréat ST2S Nouvelle–Calédonie
10 novembre 2011

EXERCICE 1 **6 points**

Un laboratoire propose un test de dépistage d'une certaine maladie. Ce test présente les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte de cette maladie ait un test positif est de 0,97 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte de cette maladie ait un test négatif est de 0,99.

On souhaite procéder à un dépistage systématique dans une population donnée, au sein de laquelle s'est déclenchée une épidémie.
On admet que la proportion de personnes atteintes de la maladie dans cette population est 4 %. On choisit une personne au hasard et on note :

- M l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie » ;
- T l'évènement : « la personne choisie a un test positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires respectifs des évènements M et T.

1. *Dans cette question, aucune justification n'est demandée.*

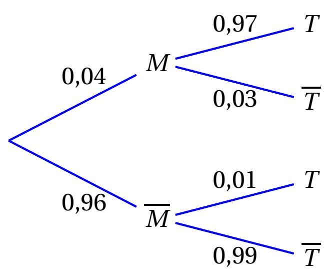
Donnons les valeurs respectives des probabilités $p(M)$, $p_M(T)$ et $p_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right)$,

$p(M) = 0{,}04$ car on admet que la proportion de personnes atteintes de la maladie dans cette population est 4 %.

$p_M(T) = 0{,}97$ car la probabilité qu'une personne atteinte de cette maladie ait un test positif est de 0,97 ;

$p_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right) = 0{,}99$ car la probabilité qu'une personne non atteinte de cette maladie ait un test négatif est de 0,99.

Construisons l'arbre de probabilités correspondant à la situation.



2. $M \cap T$ est l'évènement : « La personne choisie est atteinte de la maladie et a un test positif », calculons sa probabilité. $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}04 \times 0{,}97 = 0{,}0388$.

3. On admet que le résultat du test est correct s'il est conforme à l'état de santé de la personne soumise au dépistage.

Montrons que : « la probabilité que le résultat du test soit correct est égale à 0,989 2 ».

Le résultat du test est correct si la personne est malade et a un test positif ou la personne n'est pas malade et a un test négatif. Calculons la probabilité de la réunion de ces évènements.

$p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0{,}0388 + 0{,}96 \times 0{,}99 = 0{,}9892$.

4. *Dans cette question, on arrondira le résultat à* 10^{-4} *près.*

On appelle valeur prédictive d'un test de dépistage la probabilité qu'une personne présentant un test positif soit atteinte de la maladie.

a. Calculons $p(T)$.
$p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) = 0{,}0388 + 0{,}96 \times 0{,}01 = 0{,}0484$.

b. La valeur prédictive de ce test est $P_T(M)$.
$p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}0388}{0{,}0484} = 0{,}8017$.

EXERCICE 2 **7 points**

Une maladie est apparue dans un pays au cours de l'année 2007; 397 cas ont été enregistrés au cours de cette année-là.

On a reproduit ci-dessous une feuille de calcul, réalisée sur un tableur, dans laquelle figurent des informations sur l'évolution du nombre de nouveaux cas diagnostiqués pour la période 2007-2010.

	A	B	C	D	E
1	Année	2007	2008	2009	2010
2	Nombre de nouveaux cas	397	429	463	500
3	Taux d'évolution annuel (à 0,01 % près)		8,06 %	7,93 %	7,99 %

Les cellules de la ligne 3 sont au format pourcentage.

1. Calculons le nombre de nouveaux cas qui ont été recensés entre le 1er janvier 2007 et le 31 décembre 2010. Effectuons la somme des nouveaux cas recensés dans cette période. $397 + 429 + 463 + 500 = 1\,789$.

1 789 nouveaux cas ont été recensés entre entre le 1er janvier 2007 et le 31 décembre 2010.

2. Une formule, entrée en C3 puis recopiée vers la droite jusqu'en E3, qui permet d'obtenir les valeurs figurant dans la ligne 3 du tableau est : =(C$2-B$2)/B$2

Dans la suite, on considère que, dans l'attente d'un traitement ou d'un vaccin, le nombre de nouveaux cas va continuer à augmenter de 8 % par an. On note u_0 le nombre de nouveaux cas en 2010, n le nombre d'années écoulées depuis 2010 et u_n le nombre de nouveaux cas au cours de l'année $(2010 + n)$.

3. À un taux d'évolution de 8 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,08. Chaque terme se déduit du précédent, sauf le premier, en le multipliant par 1,08. Par conséquent la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,08 et de premier terme la valeur en 2010 $u_0 = 500$.

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est

$u_n = u_0 \times q^n$.

$u_n = 500 \times (1{,}08)^n$.

4. Donnons une estimation du nombre (arrondi à l'unité) de nouveaux cas que l'on peut faire pour l'année 2020 si la progression se poursuit au même rythme. En 2020, n=10. $u_{10} = 500 \times 1{,}08^{10} \approx 1\,079$.

En 2020, nous pouvons estimer à 1 079 le nombre de nouveaux cas.

5. **a.** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1{,}08^x \geqslant 3$.

$1{,}08^x \geqslant 3 \iff \log 1{,}08^x \geqslant \log 3 \iff x \log 1{,}08 \geqslant \log 3 \iff x \geqslant \dfrac{\log 3}{\log 1{,}08}$.

Or $\dfrac{\log 3}{\log 1{,}08} \approx 14{,}2749$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{\log 3}{\log 1{,}08}\ ;\ +\infty\right[$.

b. Pour déterminer l'année durant laquelle une estimation du nombre de nouveaux cas sera supérieure à1 500, résolvons $u_n \geqslant 1500$ c'est-à-dire $1{,}08^n \geqslant 3$.
En utilisant la réponse précédente, $n = 15$ par conséquent nous pouvons estimer que le nombre de nouveaux cas dépassera 1 500 en 2025.

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

6. **a.** Calculons $\sum_{n=1}^{11} u_n$ c'est-à-dire $u_1 + u_2 + \cdots + u_{11}$.

$u_1 = 1{,}08 \times 500$. $\quad u_1 + u_2 + \cdots + u_{11} = 1{,}08 \times 500 \times \dfrac{1{,}08^{11} - 1}{1{,}08 - 1} \approx 8\,988{,}563\,2$

b. Les personnes qui auront contracté la maladie au cours des quinze années suivant son apparition (c'est-à-dire des années 2007 à 2021) se répartissent en deux ensembles disjoints :

celui qui contient celles qui ont contracté la maladie entre le premier janvier 2007 et le 31 décembre 2010 ;

celui qui contient celles qui l'ont contractée entre le premier janvier 2011 et le 31 décembre 2021.

$1\,789 + 8\,989 = 10\,778$

Nous pouvons estimer le nombre, arrondi à l'unité, de personnes ayant contracté la maladie entre 2007 et 2021 à 10 778.

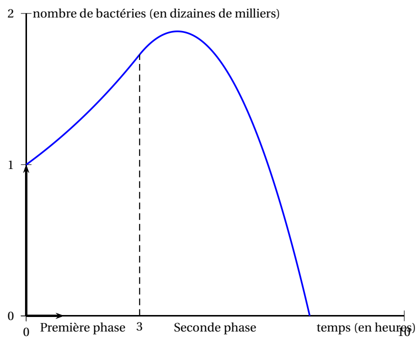
Formulaire :
La somme de p termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n), de raison q différente de 1, se calcule de la manière suivante :

$$\sum_{n=1}^{p} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_p = u_1 \times \frac{1 - q^p}{1 - q}$$

EXERCICE 3 **7 points**

Dans un milieu de culture, une population bactérienne évolue en fonction du temps.
Au début de l'étude, il y a 10 000 bactéries dans la culture. Au bout de 3 heures, on y introduit un puissant antibiotique.
Dans tout l'exercice, t désigne le temps (exprimé en heures) écoulé depuis le début de l'étude.

Le graphique ci-dessous donne l'évolution du nombre de bactéries (exprimé en dizaines de milliers) en fonction de t.



Partie A : étude de la première phase - avant introduction de l'antibiotique

Au cours de la première phase, le nombre de bactéries (exprimé en dizaines de milliers), est donné en fonction de t par : $f(t) = 1{,}2^t$.

1. Déterminons le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par $f(t) = 1{,}2^t$. Nous savons que si $a > 1$ la fonction qui à x associe a^x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Ici $a = 1{,}2$, c'est-à-dire un nombre strictement supérieur à 1 par conséquent la fonction f est une fonction croissante sur $[0\,;3]$.

2. Déterminons par le calcul le nombre de bactéries présentes dans la culture au bout d'une heure et demie, puis au bout de trois heures. Pour ce faire, calculons

- $f(1{,}5) = 1{,}2^{1{,}5} \approx 1{,}315$. Au bout d'une heure et demie, le nombre de bactéries s'élevait à environ 13 150.

- $f(3)$. $f(3) = 1,2^3 = 1,728$. Au bout de trois heures, le nombre de bactéries s'élevait à 17 280.

Partie B : étude de la seconde phase - après introduction de l'antibiotique

Après introduction de l'antibiotique, et tant qu'il reste des bactéries dans la culture, le nombre de celles-ci (exprimé en dizaines de milliers), est donné en fonction de t par : $g(t) = -0,1536t^2 + 1,2288t - 0,576$.

1. Calculons $g(7,5)$. $g(7,5) = 0$. Au bout de sept heures et demie, il ne reste plus de bactéries dans la culture.
2. Déterminons $g'(t)$ pour t appartenant à $[3 ; 7,5]$, où g' désigne la fonction dérivée de g.

   $g'(t) = -0,1536(2t) + 1,2288 = -0,3072t + 1,2288$
3. Résolvons l'inéquation $g'(t) \geqslant 0$ dans l'intervalle $[3 ; 7,5]$.

   Résolvons-la d'abord dans $\mathbb{R}$. $-0,3072t + 1,2288 \geqslant 0 \iff 0,3072t \leqslant 1,2288 \iff t \leqslant \dfrac{1,2288}{0,3072} \iff t \leqslant 4$

   Par conséquent l'ensemble des solutions de l'inéquation $g'(t) \geqslant 0$ dans l'intervalle $[3 ; 7,5]$ est $[3 ; 4]$.

   Étudions le sens de variation de g sur $[3 ; 7,5]$.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. Sur $[3 ; 4[$, $g'(x) > 0$, par conséquent g est strictement croissante sur cet intervalle.

   si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante sur I. Sur $]4 ; 7,5[$, $g'(x) < 0$, par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.
4. Au cours de la première heure suivant l'introduction de l'antibiotique, le nombre de bactéries dans la culture continue de croître.

   Au cours des trois heures et demie suivantes, le nombre de bactéries dans la culture décroît.
5. L'introduction de l'antibiotique a permis d'éviter que le nombre de bactéries n'atteigne 20 000. En effet $g(4)$ est le maximum de la fonction et $g(4) = 1,8816$.

   Le maximum de bactéries dans la culture est de 18 816.