Durée : 2 heures

∽ Corrigé du baccalauréat ST2S Antilles-Guyane ∽ 6 septembre 2018

EXERCICE 1 **(9 points)**

La Direction de la recherche, des études, de l'évaluation et des statistiques (Drees) collecte des informations sur les établissements d'accueil des enfants de moins de 6 ans.

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

Ces établissements d'accueil se caractérisent notamment par leurs modes d'accueil : l'accueil en multiaccueil, en monoaccueil ou l'accueil familial.
Une enquête de la Drees révèle qu'au 31 décembre 2013, en France métropolitaine :

- 31,1 % des établissements sont des structures monoaccueil dont 58,8 % sont gérées par des organismes publics.
- 63,6 % des établissements sont des structures multiaccueil dont 55,6 % sont gérées par des organismes publics.
- Les autres établissements sont des structures d'accueil familial dont 91 % sont gérées par des organismes publics.

On choisit un établissement au hasard dans l'ensemble des établissements d'accueil. On considère les évènements suivants :

– A : « l'établissement est une structure monoaccueil » ;
– B : « l'établissement est une structure multiaccueil » ;
– C : « l'établissement est une structure d'accueil familial » ;
– D : « l'établissement est géré par un organisme public ».

On note $\overline{D}$ l'évènement contraire de D.

1. À partir des données de l'énoncé,

a. La probabilité de l'évènement A est égale à 0,311 car 31,1 % des établissements sont des structures monoaccueil .

b. La probabilité que l'établissement soit géré par un organisme public sachant qu'il s'agit d'une structure multiaccueil est notée $p_B(D)$.
$p_B(D) = 0{,}556$ car 55,6 % des structures multiaccueil sont gérées par des organismes publics.

2. Sur **l'annexe 1 page 5/6, à rendre avec la copie**, l'arbre de probabilité qui représente la situation, a été complété.

3. *Dans cette question les probabilités calculées seront arrondies au millième.*

a. $A \cap D$ est l'évènement : « L'établissement est une structure monoaccueil géré par un organisme public ». Calculons la probabilité de cet évènement.
$p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = 0{,}311 \times 0{,}588 \approx 0{,}183$.

b. Montrons que la probabilité que l'établissement soit géré par un organisme public est environ égale à 0,585.
$p(D) = p(A) \times p_A(D) + p(B) \times p_B(D) + p(C) \times p_C(D) = 0{,}183 + 0{,}636 \times 0{,}556 + 0{,}053 \times 0{,}09$.
$p(D) = 0{,}183 + 0{,}354 + 0{,}048 = 0{,}585$

4. Un journaliste affirme que parmi les établissements gérés par des organismes non publics, environ 2 sur 3 sont des structures multiaccueil.

Calculons la probabilité de l'févènementf :« l'établissement est une structure multiaccueil » sachant qu'elle est gérée par des organismes non publics.

$p_{\overline{D}}(B) = \dfrac{p(\overline{D} \cap B}{p(\overline{D})} = \dfrac{0{,}636 \times 0{,}444}{1 - 0{,}585} \approx 0{,}680$. Cette affirmation est donc vraie.

Partie B :

Le tableau suivant recense le nombre total d'établissements multiaccueil entre 2009 et 2013 en France métropolitaine.

Année	2009	2010	2011	2012	2013
Rang x_i du mois	0	1	2	3	4
Nombre y_i d'établissement multiaccueil	5 720	6 250	6 900	7 560	8 050

Source : enquête PMI-Drees – 2009 à 2013, France métropolitaine .

1. Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

   $\mathcal{T} = \dfrac{8050 - 5720}{5720} \approx 0{,}40734$.

   En pourcentage, arrondi à 0,1 %, le taux d'évolution du nombre d'établissements multiaccueil entre 2009 et 2013 est de 40,7 %.

2. Le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé aux données du tableau précédent a été représenté sur le graphique donné en **annexe 1 page 5/6**.

3. Déterminons les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points et plaçons-le dans le repère de l'**annexe 1**.

   Le point moyen est le point G de coordonnées $(\overline{x}\,;\,\overline{y})$.

   $$\overline{x}_G = \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2 \quad \overline{y}_G = \frac{5720+6250+6900+7560+8050}{5} = 6896$$

   G (2 ; 6 896)

4. On admet que la droite Δ d'équation $y = 597x + 5702$ réalise un bon ajustement affine du nuage de points et que cet ajustement reste valable jusqu'en 2018.

   a. Le point G appartient à cette droite Δ si les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite. Calculons l'ordonnée du point G d'abscisse 2.

   $y = 597 \times 2 + 5702 = 1194 + 5702 = 6896$. Cette valeur correspondant à l'ordonnée de G par conséquent G appartient à la droite Δ.

   b. La droite Δ est tracée sur le graphique de l'**annexe 1**.

   c. Selon ce modèle, déterminons une prévision du nombre d'établissements multiaccueil en 2018. En 2018 le rang de l'année est 9. Remplaçons x par 9 dans l'équation de la droite, $y = 597 \times 9 + 5072 = 11075$.

   Selon ce modèle, une prévision du nombre d'établissements multiaccueil en 2018 est de 11 075.

   remarque : Une autre possibilité, lisons sur le graphique l'ordonnée du point d'abscisse 9 appartenant à la droite.

EXERCICE 2 (6 points)

Dans une usine pharmaceutique, une unité de production fabrique un médicament qu'elle vend par lots. Sa capacité de production est limitée à 60 lots par mois.

Partie A :

Sur le graphique de l'**annexe 2, à rendre avec la copie**, est représenté le bénéfice, en euros, en fonction du nombre de lots fabriqués et vendus en un mois.

1. Avec la précision permise par le graphique de l'**annexe 2 page 6/6** et en faisant apparaître les traits utiles à la lecture :

   a. Le bénéfice, en euros, correspondant à la fabrication et à la vente en un mois de 10 lots de ce médicament est d'environ 3 600 €. Nous lisons l'ordonnée du point d'abscisse 10 appartenant à la courbe C_f.

b. Le nombre de lots que l'usine pharmaceutique doit fabriquer et vendre en un mois pour obtenir un bénéfice de 6 000 euros est d'environ 14. Nous lisons l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 6 000.

c. L'usine pharmaceutique réalise un bénéfice supérieur ou égal à 14 000 euros pour un nombre de lots fabriqués et vendus en un mois appartenant à [36; 50]. Nous lisons les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 14 000. Entre ces deux abscisses, la courbe est au dessus de la droite d'équation $y = 14000$, nous prenons l'intervalle ayant ces valeurs pour bornes.

2. La production est rentable pour un nombre de lots fabriqués et vendus en un mois supérieur à 5. Nous lisons l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.Comme à partir de cette valeur, la courbe est au dessus de l'axe des abscisses, l'usine réalise un bénéfice.

Partie B :

On admet que le bénéfice en fonction du nombre de lots fabriqués et vendus en un mois est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par $f(x) = -10x^2 + 860x - 4000$.

1. La fonction f' est la fonction dérivée de la fonction f. $f'(x) = -10(2x) + 860 = -20x + 860$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 60]$.

2. Étudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 60]$.

Sur $\mathbb{R}$, $-20x + 860 > 0$ est équivalent à $x < 43$

si $x \in [0 ; 43[$, $f'(x) > 0$, si $x \in]43 ; 60[$, $f'(x) < 0$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Sur $[0 ; 43[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Sur $]43 ; 60[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 60]$.

x	0		43		60
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	-4000	↗	14490	↘	11600

3. La fonction f admet un maximum valant 14 490 pour x valant 43 par conséquent le bénéfice maximal est de 14 490 €, le nombre de lots fabriqués et vendus correspondant à ce bénéfice maximal est alors de 43.

EXERCICE 3 **(5 points)**

Lors d'une culture *in vitro* de bactéries *Escherichia coli* on s'intéresse à la phase de croissance exponentielle lors de laquelle, dans les conditions optimales de température à 37°C, le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.
Lors de la phase exponentielle, le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries double, ici 20 minutes, est appelé temps de génération.

On estime qu'au début de la phase exponentielle, le nombre de bactéries *Eschericha coli* par mL s'élève à 50 millions. Soit u_0 le nombre de bactéries exprimé en millions au début de la phase exponentielle et u_n le nombre de bactéries après n temps de génération, c'est-à-dire après n fois 20 minutes.

On a ainsi $u_0 = 50$.

1. **a.** $u_1 = 2 \times 50 = 100$ et $u_2 = 2 \times 100 = 200$.

b. $u_3 = 2 \times u_2 = 2 \times 200 = 400$. u_3 est le nombre de bactéries exprimé en millions après trois temps de génération c'est-à-dire après une heure .

2. **a.** La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 50 car chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 2.

b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$. $u_n = 50 \times (2)^n$.

c. Calculons le nombre de bactéries par mL au bout de 2 heures de phase exponentielle. Cela correspond à six temps de génération.

$u_6 = 50 \times 2^6 = 320$.

Le nombre de bactéries par mL au bout de 2 heures de phase exponentielle est de 320 millions.

3. **a.** Déterminons la plus petite valeur entière n telle que $50 \times 2^n \geqslant 200\,000$. Pour ce faire , résolvons $50 \times 2^n \geqslant 200\,000$.

$$\begin{aligned} 50 \times 2^n &\geqslant 200\,000 \\ 2^n &\geqslant 4\,000 \\ \log 2^n &\geqslant \log 4\,000 \\ n &\geqslant \frac{\log 4\,000}{\log 2} \end{aligned}$$

$\dfrac{\log 4\,000}{\log 2} \approx 11{,}96$ La plus petite valeur entière telle que le nombre de bactéries soit supérieur à 200 milliards est 12.

b. Il est vrai qu'après 4 heures de phase exponentielle le nombre de bactéries par mL sera supérieur à 200 milliards puisque l'on a montré qu'il suffisait d'un peu moins de 12 périodes pour atteindre les 200 milliards.

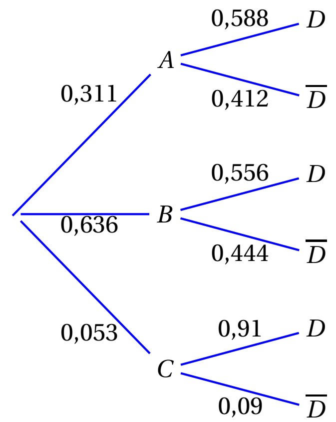
4. Une personne affirme qu'après 48 heures de phase exponentielle, le nombre de bactéries par mL sera supérieur à 10^{45}.

48 heures de phase exponentielle correspondent à 144 temps de générations. Nous avons $u_{144} = 50 \times 2^{144} \approx 1{,}15 \cdot 10^{45}$.

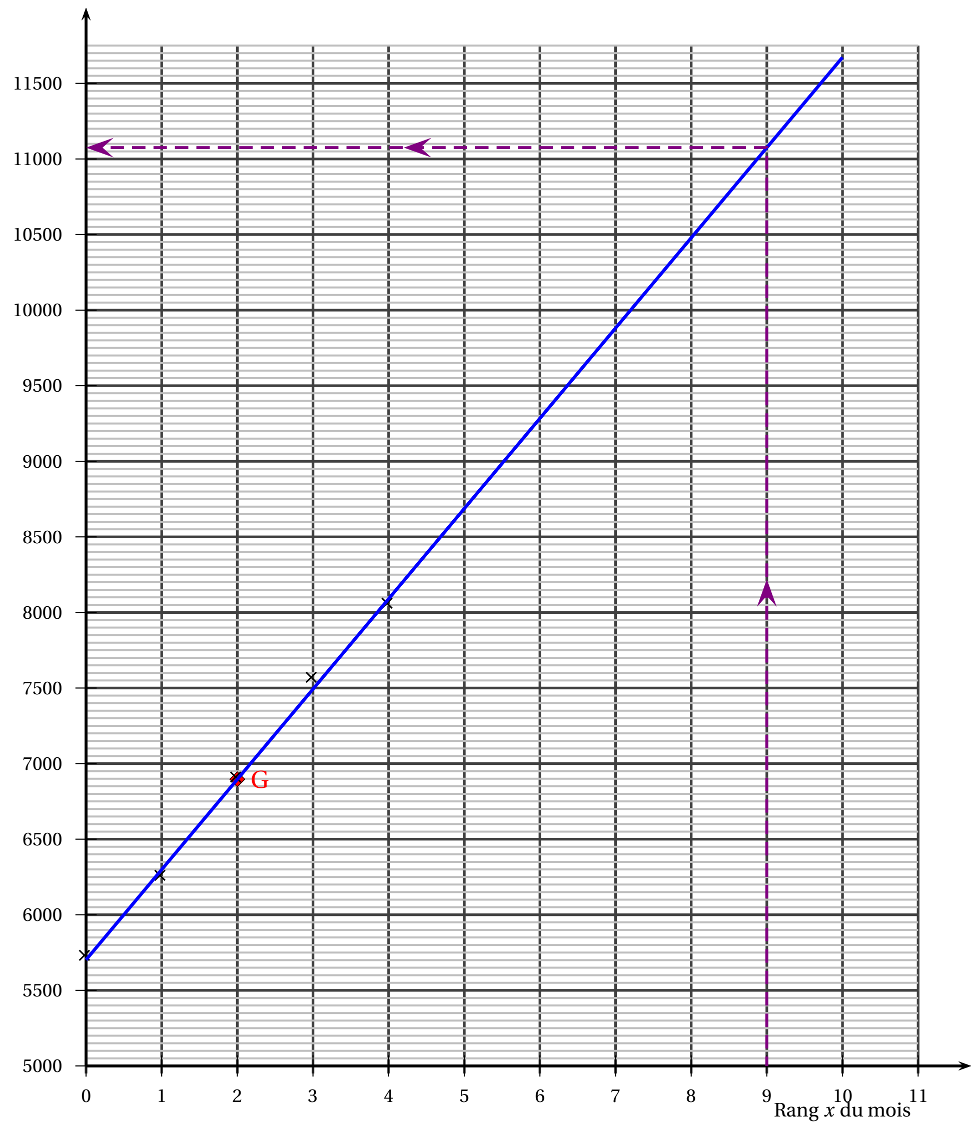
Son affirmation est vraie.

Annexe 1 à rendre avec la copie

EXERCICE 1 : Partie A



EXERCICE 1 : Partie B



Annexe 2 à rendre avec la copie

EXERCICE 2