Corrigé du baccalauréat ST2S Antilles–Guyane juin 2013

EXERCICE 1 **6 points**

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'abonnements au service de téléphonie mobile en France entre fin 2001 et fin 2009, exprimé en millions.

année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'abonnements y_i	37	38,6	41,7	44,5	48,1	51,7	55,3	58	61,5

source : Eurostat

On définit ainsi une série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ pour i allant de 1 à 9.

1. **a.** Sur la feuille page 6, le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ est représenté dans un repère orthogonal.

   b. Un ajustement affine de ce nuage est envisageable, les points semblent presque alignés.

   c. Les coordonnées de G sont $\left(\overline{x}\ ;\ \overline{y}\right)$.

$$\overline{x}_G = \frac{1+2+\cdots+8+9}{9} = 5 \qquad \overline{y}_G = \frac{37+38{,}6+\cdots+58+61{,}5}{9} \approx 48{,}5$$

   G (5 ; 48,5) est placé sur le graphique.

Dans la suite de l'exercice, deux méthodes différentes de modélisation seront utilisées.

2. **Méthode graphique**

   a. Sans effectuer de calcul, traçons la droite d'équation donnée à la question suivante. Elle passe par le point G et réalise un ajustement affine du nuage de points.

   b. Une estimation, au million d'abonnements près, à l'aide du graphique, du nombre d'abonnements au service de téléphonie mobile en France fin 2012 est d'environ 71 millions.

3. **Méthode algébrique**

   On admet dans cette partie que la droite d'équation : $y = 3,2x + 32,5$ réalise un bon ajustement de ce nuage.

   a. Vérifions, par le calcul, que cette droite passe par le point G. Pour ce faire, calculons l'ordonnée du point de la droite d'abscisse celle de G. $y = 3{,}2 \times 5 + 32{,}5 = 48{,}5$. Cette ordonnée étant celle de G, le point appartient à la droite.

   b. Estimons, à $0,1$ million d'abonnements près, par le calcul, le nombre d'abonnements au service de téléphonie mobile en France fin 2012. En 2012, le rang de l'année est 12, remplaçons x par 12 dans l'équation de la droite. $y = 3{,}2 \times 12 + 32{,}5 = 70{,}9$. Une estimation, à $0,1$ million d'abonnements près, du nombre d'abonnements au service de téléphonie mobile en France fin 2012 est 70,9 millions d'abonnements.

   c. Les dernières données disponibles indiquent qu'il y a $70,4$ millions d'abonnements au service de téléphonie mobile en France en juin 2012. L'estimation obtenue à la question **b.** parait surestimer légèrement la réalité. L'estimation est supérieure d'environ un demi-million d'abonnements.

EXERCICE 2 **7 points**

Partie A

Dans cette partie, les résultats seront exprimés en pourcentage et arrondis à 0,1 % près.

1. En France, les 4 premiers groupes iso-ressources (GIR 1 à 4) de la grille nationale AGGIR ouvrent droit à l'allocation personnalisée d'autonomie (APA).

Fin 2010, 1 200 milliers de personnes âgées dépendantes ont bénéficié de l'APA dont 734 milliers ont directement perçu l'APA à domicile.

Voici le tableau donnant, en milliers de personnes, le nombre de bénéficiaires de l'APA selon le degré de dépendance de la personne :

	Au 31 décembre 2010		
	Domicile	En établissements	Total
GIR1	19	86	105
GIR2	131	191	322
GIR3	159	79	238
GIR4	425	110	535
Ensemble	734	466	1 200

Source : Drees, enquête trimestrielle auprès des conseils généraux

a. Calculons, en pourcentage, la proportion des bénéficiaires de l'APA qui ont perçu cette allocation directement à domicile.

En milliers, les bénéficiaires de l'APA qui ont perçu cette allocation directement à domicile étaient 734 et les bénéficiaires de l'APA 1 200. $\dfrac{734}{1\,200} \approx 0{,}6167$.

Il y a environ 61,7 % des bénéficiaires de l'APA qui ont perçu cette allocation directement à domicile.

b. Parmi les personnes bénéficiant de l'APA en établissement, calculons, en pourcentage, la proportion de celles relevant du GIR2.

En milliers, les bénéficiaires de l'APA relevant du GIR2 qui ont perçu cette allocation en établissement étaient 191 et les bénéficiaires de l'APA en établissement 466.

$\dfrac{191}{466} \approx 0{,}40987$.

Parmi les personnes bénéficiant de l'APA en établissement, il y a environ 41 % des bénéficiaires qui relevaient du GIR2.

2. En 2009, 718 milliers de personnes ont bénéficié de l'APA à domicile. Calculons le taux d'évolution, en pourcentage et arrondi à 0,1 % près, du nombre de bénéficiaires de l'APA à domicile entre 2009 et 2010.

Le taux d'évolution est défini par $\frac{\text{valeur finale}-\text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $\dfrac{734-718}{718} \approx 0{,}02228$.

Entre 2009 et 2010 le nombre de bénéficiaires de l'APA à domicile, a augmenté d'environ 2,2 %.

Partie B

On note u_0 le nombre de milliers de personnes bénéficiant de l'APA à domicile à la fin de l'année 2010, et u_n le nombre de milliers de personnes bénéficiant de l'APA à domicile à la fin de l'année $(2010+n)$. Ainsi, $u_0 = 734$. On admet que le nombre de bénéficiaires de l'APA à domicile augmente de 2,2 % chaque année à partir de 2010.
On utilise un tableur pour calculer des termes de la suite (u_n) :

	A	B	C	D
1	années	n	u_n	
2	2010	0	734	
3	2011	1		
4	2012	2		
5	2013	3		
...	...	...		

1. À un taux d'évolution de 0,022 correspond un coefficient multiplicateur de 1,022. $u_1 = 734 \times 1{,}022 = 750$ à l'unité près.

2. La suite (u_n) est une suite géométrique car chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un même nombre, ici 1,022. Par conséquent la raison est 1,022.

3. Quatre formules à saisir dans la cellule C3, puis à recopier vers le bas pour afficher les valeurs de u_n, sont proposées :

$\cancel{\boxed{= 734 \star 1,022}}$ $\qquad$ $\boxed{\boxed{=\text{C2}\star 1,022}}$ $\qquad$ $\cancel{\boxed{\text{C\$ 2} \star 1,022}}$ $\qquad$ $\cancel{\boxed{=\text{\$C\$ 2} \star 1,022}}$

Une seule est exacte, =C2*1,022. Avec les formules 1 et 4, nous obtenons toujours la même valeur, u_1. La 3 ne donne aucun résultat car il manque le signe « = ».

4. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est pour tout entier naturel n $u_n = u_0 q^n$. $U_n = 734 \times (1,022)^n$.

5. Le nombre de personnes bénéficiant de l'APA à domicile que nous pouvons prévoir pour la fin de l'année 2020 est en milliers de 912 à un millier près. En effet le rang de 2020 est 10, calculons alors u_{10}.

$u_{10} = 734 \times (1,022)^{10} \approx 912,44$.

6. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Si la progression reste la même, à partir de la fin de quelle année le nombre de personnes bénéficiant de l'APA à domicile dépassera-t-il un million ? Pour ce faire, résolvons

$734 \times (1,022)^n > 1\,000$.

$734 \times (1,022)^n > 1\,000 \iff (1,022)^n > \dfrac{1\,000}{734} \iff n \log 1,022 > \log\left(\dfrac{1\,000}{734}\right) \iff$

$n > \dfrac{\log\left(\dfrac{1\,000}{734}\right)}{\log 1,022}$ d'où $n > 14,21$

Le nombre de personnes bénéficiant de l'APA à domicile dépassera un million à partir de la fin de 2015

EXERCICE 3 **7 points**

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un vaccin. Sa capacité de production, sur une semaine, lui permet de réaliser entre 0 et 18 litres de ce produit. On note $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire (en euros) réalisé par le laboratoire pour une production d'un volume x de vaccin exprimé en litres. On appelle B la fonction définie pour tout x de l'intervalle $[0 ; 18]$ qui à x associe $B(x)$. La courbe représentative de la fonction B est donnée en annexe.

Partie A : Lecture graphique

1. À l'aide du graphique et avec la précision permise par celui-ci, les volumes hebdomadaires nécessaires pour que le bénéfice hebdomadaire soit égal à 400 euros sont d'environ 3,1 ℓ ou de 15,3 ℓ. Nous lisons les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 400$.

2. Le laboratoire est bénéficiaire lorsque la courbe représentative de la fonction B est située au dessus de l'axe des abscisses. Cette courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et environ 16,3. Entre ces deux valeurs, elle est située dans le demi-plan des y positifs. À l'aide du graphique, les volumes hebdomadaires produits permettant de réaliser un bénéfice appartiennent à $[1 ; 16,3]$.

Partie B : Étude du bénéfice hebdomadaire

On admet que B est la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 18]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 180x - 184.$$

On notera B' la fonction dérivée de la fonction B.

1. **a.** Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,18]$, calculons $B'(x)$.
$B'(x) = -3x^2 + 6(2x) + 180 = -3x^2 + 12x + 180 = 3(-x^2 + 4x + 60)$

b. Vérifions que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,18]$, $B'(x) = (-3x+30)(x+6)$.
$(-3x+30)(x+6) = 3(-x+10)(x+6) = 3(-x^2 - 6x + 10x + 60) = 3(-x^2 + 4x + 60)$. Ceci est bien égale à $B'(x)$ trouvée précédemment.

c. Étudions le signe de $B'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,18]$.
Sur cet intervalle, $3(x+6) > 0$ donc le signe de $B'(x)$ est le signe de $-x+10$.
Sur $\mathbb{R}$, $-x + 10 > 0 \iff x < 10$.
Par conséquent, $B'(x) > 0$ si x appartient à $[0\,;\,10[$ et $B'(x) < 0$ si x appartient à $]10\,;\,18]$.

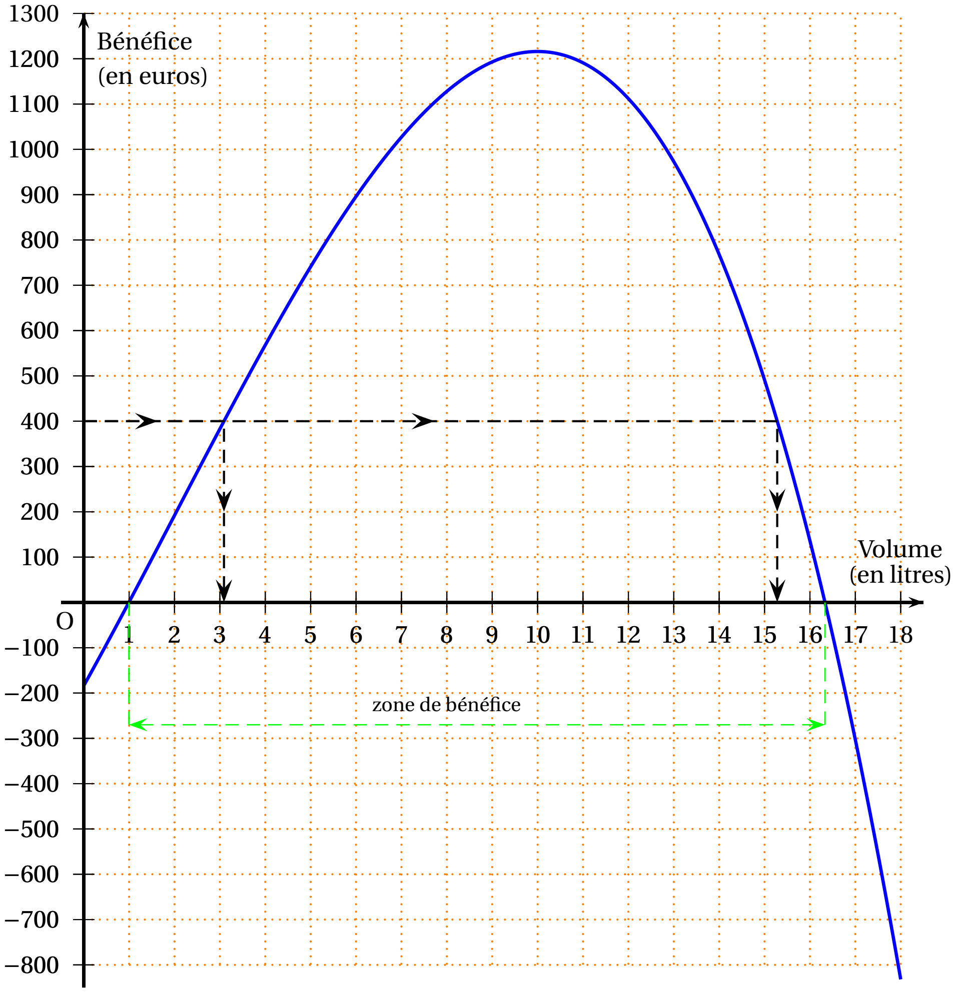
d. Dressons le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,18]$
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Pour $x \in [0\,;\,10[$, $B'(x) > 0$, par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Pour $x \in]10\,;\,18]$, $B'(x) < 0$, par conséquent B est strictement décroissante sur cet intervalle.

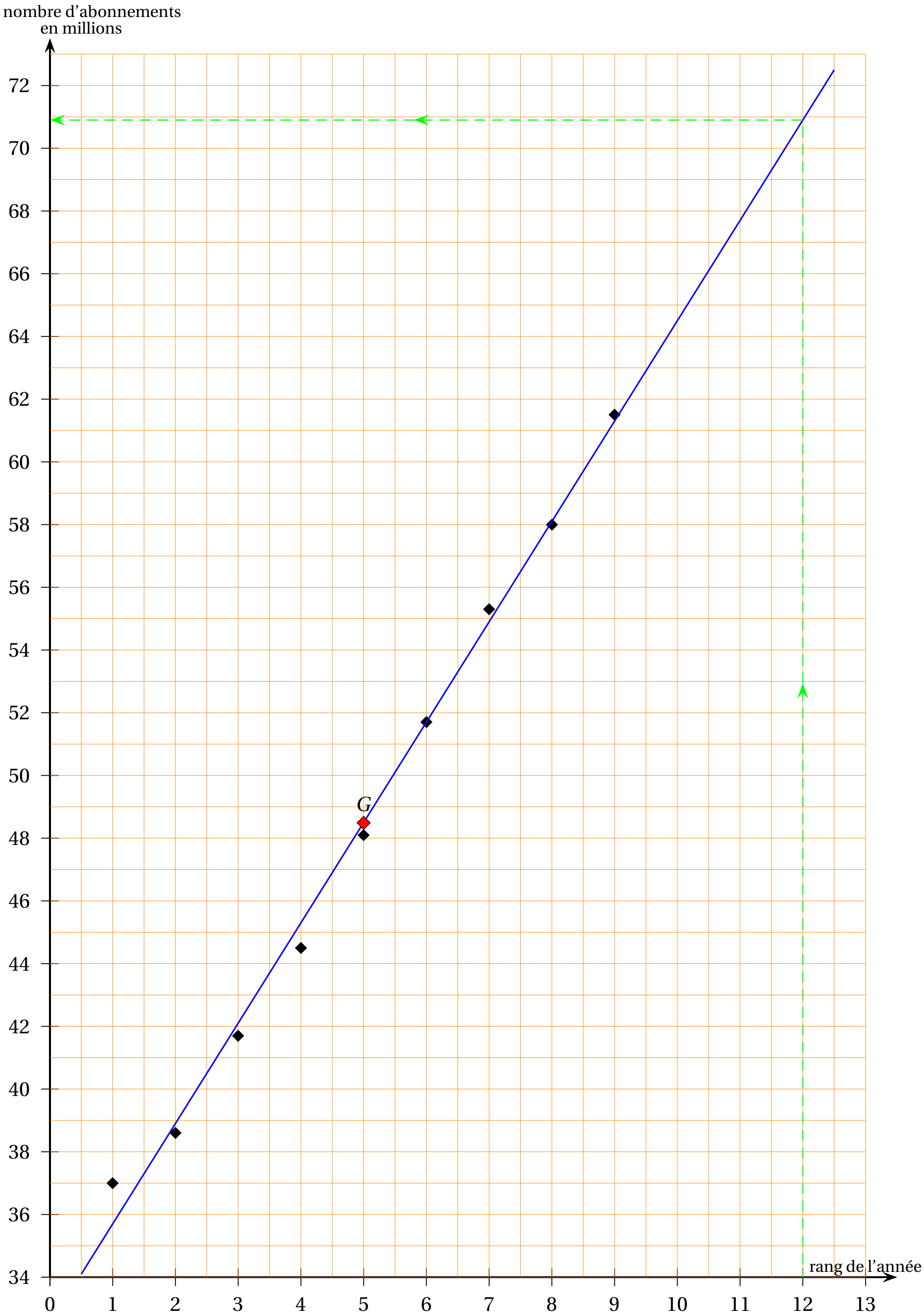
x	0		10		18
$B'(x)$		+	0	−	
Variations de B	-184	↗	1216	↘	-832

2. En utilisant le tableau de variations, le volume hebdomadaire à produire pour obtenir un bénéfice maximal est de 10 ℓ.

Le montant du bénéfice hebdomadaire maximal est alors de 1 216 euros.

ANNEXE
(À rendre avec la copie)




nombre d'abonnements
en millions
72
70
68
66
64
62
60
58
56
54
52
50
48
46
44
42
40
38
36
34
G
rang de l'année
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13