Durée : 2 heures

∽ Corrigé du baccalauréat ST2S Métropole–La Réunion ∾ 6 septembre 2018

EXERCICE 1 **6 points**

La loi de financement de la Sécurité sociale comprend un objectif national de dépenses d'assurance maladie, qui est voté chaque année par le Parlement.

Le montant des dépenses d'assurance maladie a été évalué pour l'année 2016 à 185,2 milliards d'euros. Le Parlement a voté une croissance de ces dépenses de 2,1 % pour l'année 2017.

1. Montrons que le montant des dépenses d'assurance maladie voté pour l'année 2017 est de 189,1 milliards d'euros (à cent millions près). À une augmentation de 2,1 % correspond un coefficient multiplicateur de $1+\dfrac{2,1}{100}$ soit 1,021. Effectuons le calcul : $185,2\times 1,021\approx 189,1$.
Cette valeur correspond bien à 189,1 milliards à cent millions près.
Pour estimer les montants des années suivantes, on suppose que le Parlement votera chaque année une augmentation de 2,1 % de ces dépenses.
On modélise à l'aide d'une suite (v_n) le montant, en milliards d'euros, des dépenses d'assurance maladie voté chaque année. On note v_0 le montant voté pour l'année 2016 et v_n le montant voté pour l'année $(2016+n)$, où n est un entier positif ou nul.
On a ainsi $v_0 = 185,2$.
On veut utiliser la feuille de calcul automatisé ci-contre afin d'obtenir les valeurs successives de la suite (v_n).

	A	B
1	n	v_n
2	0	185,2
3	1	189,1
4	2	
5	3	

2. Une formule qui a pu être entrée dans la cellule B3 de sorte que, recopiée vers le bas, elle permette d'afficher les valeurs de la suite (v_n) est =$B2*1,021
3. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,021 et de premier terme 185,2.
4. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0\times (q)^n$. $v_n = 185,2\times(1,021)^n$.
5. Déterminons une estimation du montant des dépenses d'assurance maladie voté par le Parlement pour l'année 2020. En 2020, $n=4$, calculons v_4, $v_4 = 185,2\times(1,021)^4\approx 201,2537$.
Une estimation du montant, arrondi à la centaine de millions, des dépenses d'assurance maladie en 2020 est de 201,3 milliards d'euros.
6. Résolvons, dans l'ensemble des nombres réels, l'inéquation $185,2\times 1,021^x\geqslant 210$.

$$\begin{aligned}
185,2\times 1,021^x &\geqslant 210\\
1,021^x &\geqslant \frac{210}{185,2}\\
1,021^x &\geqslant \frac{525}{463}\\
\log 1,021^x &\geqslant \log\left(\frac{525}{463}\right)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x\log 1,021 &\geqslant \log\left(\frac{525}{463}\right)\\
x &\geqslant \frac{\log\left(\frac{525}{463}\right)}{\log 1,021}\\
\frac{\log\left(\frac{525}{463}\right)}{\log 1,021} &\approx 6,047.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{\log\left(\frac{525}{463}\right)}{\log 1,021}\ ;\ +\infty\right[$ ou $[6,05\ ;\ +\infty[$.

7. Déterminons, suivant ce modèle, l'année pour laquelle sera voté, pour la première fois, un montant de dépenses d'assurance maladie supérieur à 210 milliards d'euros.
En utilisant le résultat de l'inéquation, nous pouvons prévoir qu'en 2023 (2016+7)sera voté, pour la première fois, un montant de dépenses supérieur à 210 milliards d'euros.

EXERCICE 2 — 8 points

Un laboratoire prévoit de commercialiser un nouveau capteur destiné à améliorer le suivi en continu de la glycémie des diabétiques.

Ce laboratoire a demandé à un service hospitalier de proposer ce capteur à plusieurs patients afin de déterminer son influence sur l'équilibre du diabète.
Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : *Influence du capteur*

À la fin de l'évaluation par le service hospitalier, l'étude de l'ensemble des dossiers des patients diabétiques a permis d'établir que :

- 65 % des patients ont un diabète équilibré ;
- parmi les patients qui ont un diabète équilibré, 26 % étaient équipés du capteur de glycémie en continu ;
- parmi les patients qui ont un diabète déséquilibré, 12 % étaient équipés du capteur de glycémie en continu.

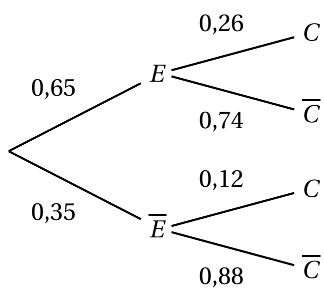
On choisit au hasard le dossier d'un patient et on considère les évènements suivants :

- E : « le dossier est celui d'un patient dont le diabète est équilibré » ;
- $\overline{E}$: « le dossier est celui d'un patient dont le diabète est déséquilibré » ;
- C : « le dossier est celui d'un patient équipé du capteur de glycémie en continu » ;
- $\overline{C}$: « le dossier est celui d'un patient non équipé du capteur de glycémie en continu ».

1. La probabilité de l'évènement E, notée $p(E)$ est égale à 0,65 puisque 65 % des patients ont un diabète équilibré .

2. La probabilité de $P_E(C)$, probabilité de C sachant E est égale à 0,26 car parmi les patients qui ont un diabète équilibré, 26 % étaient équipés du capteur de glycémie en continu.

3. Complétons l'arbre pondéré suivant :



4. Les résultats seront arrondis au millième.

a. $E \cap C$ est l'évènement : « Le dossier est celui d'un patient dont le diabète est équilibré et qui est équipé d'un capteur de glycémie en continu ». La probabilité de cet évènement est $P(E \cap C)$. $P(E \cap C) = P(E) \times P_E(C) = 0,65 \times 0,26 = 0,169$

b. Montrons que la valeur de $P(C)$ est égale à 0,211.

$P(C) = P(E \cap C) + P\left(\overline{E} \cap C\right) = P(E) \times P_E(C) + P\left(\overline{E}\right) \times P_{\overline{E}}(C)$.

$P(C) = 0,169 + 0,35 \times 0,12 = 0,169 + 0,042 = 0,211$.

La probabilité que le dossier soit celui d'un patient équipé d'un capteur de glycémie est de 0,211.

c. La probabilité que le dossier choisi soit celui d'un patient dont le diabète est équilibré sachant que celui-ci est équipé du capteur de glycémie en continu est notée $P_C(E)$.

$P_C(E) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,169}{0,211} \approx 0,80095$

La probabilité que le dossier choisi soit celui d'un patient dont le diabète est équilibré sachant que celui-ci est équipé du capteur de glycémie en continu est, arrondie au millième, 0,801

5. L'objectif du laboratoire est que son capteur permette de diviser par deux la probabilité d'avoir un diabète déséquilibré.

On admet que la probabilité qu'un patient non équipé d'un capteur de glycémie en continu présente un diabète déséquilibré est environ égale à 39 %.

Calculons la probabilité que le dossier soit celui d'une personne ayant un diabète déséquilibré sachant qu'elle a eu un capteur.

$P_C(\overline{E}) = \dfrac{P(C \cap \overline{E})}{P(C)} = \dfrac{0{,}12 \times 0{,}35}{0{,}211} \approx 0{,}199.$

Nous pouvons considérer que l'objectif du laboratoire n'est pas entièrement atteint car $\dfrac{0{,}39}{2} = 0{,}195$ et $0{,}199 > 0{,}195$.

Partie B : *Fiabilité du capteur*

Un service hospitalier reçoit six capteurs de glycémie en continu dont il souhaite vérifier la fiabilité. Il en équipe six patients. Pour chacun d'eux, il effectue un test sanguin qui permet de mesurer le pourcentage x d'hémoglobine exposée au glucose.

Ce pourcentage x est comparé à la moyenne y des glycémies mesurées, en mmol$\cdot$ L $^{-1}$, par le capteur au cours des trois mois d'étude. Dans la suite du problème, le nombre y est appelé glycémie moyenne du capteur.

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Patients	Patient A	Patient B	Patient C	Patient D	Patient E	Patient F
Valeur du test sanguin (en %) : x	6,4	7,8	9,3	6,9	7,3	8,3
Glycémie moyenne du capteur (en mmol$\cdot$L^{-1}) : y	7,6	9,8	11,1	8,2	9,2	10,7

La notice technique du capteur indique que, lorsque le capteur est fiable, les mesures obtenues sont liées par la relation :

$$y = 1,6x - 2,6.$$

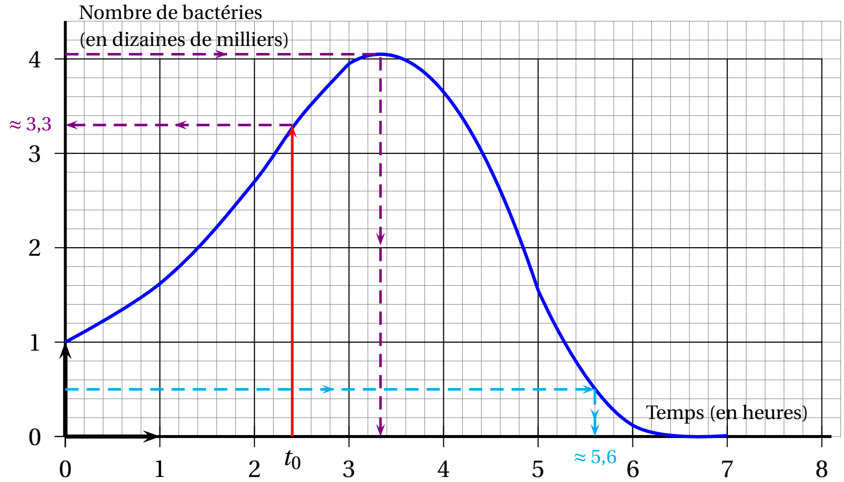
1. D'après la relation précédente, calculons la glycémie moyenne d'un capteur fiable si le test sanguin donne une valeur x égale à 8. Pour ce faire, remplaçons x par 8 dans la relation : $y = 1{,}6 \times 8 - 2{,}6 = 10{,}2$
2. La droite d'équation $y = 1,6x - 2,6$ est tracée dans le repère fourni en annexe (à remettre avec la copie). Pour la tracer, nous avons pris les points de coordonnées (5 ;5,4) et (9 ; 11,8).
3. **a.** Les points qui correspondent aux 6 patients ont été placés dans le repère fourni en annexe.

   b. Au vu de ces résultats, le service hospitalier pense que l'un des capteurs n'a pas permis d'obtenir des résultats fiables. Le patient concerné par ce problème est le patient C car le point correspondant est le plus éloigné de la droite.

EXERCICE 3 **6 points**

Dans un milieu de culture, une population bactérienne évolue en fonction du temps t exprimé en heures. À l'instant $t = 0$, il y a 10 000 bactéries dans la culture. À l'instant t_0, on y introduit un puissant antibiotique.

Le graphique ci-dessous donne l'évolution du nombre de bactéries (exprimé en dizaines de milliers) en fonction du temps t (en heures).



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Étude graphique

1. Remettons les cinq phrases qui suivent dans le bon ordre afin qu'elles décrivent les étapes successives de l'évolution au cours du temps du nombre de bactéries observées sur le graphique précédent.
La suite de cinq lettres est alors « **d-e-a-c-b** ».

d. Le nombre de bactéries augmente de plus en plus vite.
e. On introduit la dose d'antibiotique.
a. Le nombre de bactéries augmente de moins en moins vite.
c. Le nombre de bactéries diminue de plus en plus vite.
b. Le nombre de bactéries diminue de moins en moins vite.

2. Déterminons, avec la précision permise par le graphique (tracer les pointillés nécessaires à la lecture) :

a. une estimation du nombre de bactéries au moment de l'introduction de l'antibiotique est 33 000 ;

b. une estimation du nombre maximum de bactéries obtenu dans ce milieu de culture est de 40 500 ;

c. une estimation de l'instant à partir duquel le nombre de bactéries est inférieur à 5 000 est de 5,6 h.

Partie B : Détermination du nombre maximal de bactéries

Entre 3 h et 5 h après le début de l'étude, le nombre de bactéries (exprimé en dizaines de milliers), est donné en fonction de t (en heures) par :

$$f(t) = -0,9t^2 + 6t - 5,95.$$

1. Calculons l'image de 4,5 par la fonction $f, f(4,5) = -0,9 \times 4,5^2 + 6 \times 4,5 - 5,95 = 2,825$.
Le nombre de bactéries 4,5 h après le début de l'étude est d'environ 28 000.

2. Soit f' la fonction dérivée de f, $f'(t) = -0,9(2x) + 6 = -1,8t + 6$ pour t appartenant à $[3\,;\,5]$.

3. Résoudre l'inéquation $f'(t) > 0$ dans l'intervalle $[3\,;\,5]$.
Dans $\mathbb{R}$, $-1,8t + 6 > 0$ est équivalent à $t < \dfrac{6}{1,8}$ soit $t < \dfrac{10}{3}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation sur $[3\,;\,5]$ est $\left[3\,;\,\dfrac{10}{3}\right]$.
Puisque la fonction dérivée est positive sur $\left[3\,;\,\dfrac{10}{3}\right]$ f est donc strictement croissante sur cet intervalle. La fonction f' est négative sur $\left[\dfrac{10}{3}\,;\,5\right]$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle. Il en résulte que f admet un maximum sur $[3\,;\,5]$ atteint pour $t = \dfrac{10}{3} = \dfrac{6}{1,8}$.

4. Pour déterminer si l'introduction de l'antibiotique a permis d'éviter que le nombre de bactéries n'atteigne 40 000, calculons la valeur du maximum.
$f\left(\dfrac{10}{3}\right) = -0,9 \times \left(\dfrac{10}{3}\right)^2 + 6 \times \left(\dfrac{10}{3}\right) - 5,95 = 4,05$.
L'introduction de l'antibiotique n'a pas permis d'éviter que leur nombre atteigne les 40 000 puisque leur nombre a atteint 40 500.

Annexe à remettre avec la copie

Exercice 2 - Partie B