∽ Corrigé du baccalauréat ST2S Métropole septembre 2011 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Le relevé ci-dessous donne la consommation de dioxygène exprimée en litres par minute (ℓ.min^{-1}), pour une personne, en fonction de la puissance exprimée en watts (W) de l'effort fourni.

Puissance de l'effort (W)	30	60	90	120	150	180	210	240
Consommation en dioxygène (ℓ.min^{-1})	0,8	1,3	1,7	2,1	2,5	3,2	3,6	3,9

1. Le nuage de points associé à ce tableau dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1,5 cm pour 30 W sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,2 ℓ.min^{-1} sur l'axe des ordonnées, est construit page 5.

2. On considère la droite (d) passant par les points extrêmes du nuage.

   a. Cette droite est tracée sur le graphique.

   b. Calculons le coefficient directeur m de cette droite.

   Le coefficient directeur d'une droite définie par deux points A et B n'ayant pas la même abscisse est :
   $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. $\quad m = \dfrac{3,9 - 0,8}{240 - 30} \approx 0,014762$. Le coefficient directeur, arrondi à 10^{-3}, est 0,015.

3. En supposant que cette droite réalise un ajustement satisfaisant du nuage et en utilisant cet ajustement, déterminons avec la précision permise par la lecture graphique :

   a. la consommation de dioxygène lors d'un effort d'une puissance égale à 105 W. Nous lisons l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 105. La consommation de dioxygène est d'environ 1,90 ℓ.min^{-1}.

   b. la puissance de l'effort fourni pour une consommation de dioxygène égale à 3 ℓ.min^{-1}. Nous lisons l'abscisse du point de la droite d'ordonnée 3. La puissance de l'effort est d'environ 179 W.

   On fera apparaître sur le graphique les traits de construction utiles.

4. On considère que, pour une puissance de l'effort comprise entre 30 W et 300 W, la droite d'équation $y = 0,015x + 0,38$ correspond à un ajustement affine satisfaisant de ce nuage.

   a. Calculons la consommation de dioxygène obtenue à l'aide de cet ajustement, pour une puissance de l'effort égale à 300 W. Remplaçons x par 300. $y = 0,015 \times 300 + 0,38 = 4,88$.
   La consommation pour une puissance de l'effort égale à 300 W est de 4,88 ℓ.min^{-1}.

   b. Calculons, en utilisant toujours le même ajustement, la puissance de l'effort fourni pour une consommation de dioxygène égale à 3,4 ℓ.min^{-1}. Pour ce faire, résolvons $0,015x + 0,38 = 3,4$.

   $$0,015x + 0,38 = 3,4 \iff 0,015x = 3,4 - 0,38 \iff x = \dfrac{3,4 - 0,38}{0,015} = 201,33\ .$$

   La puissance de l'effort fourni pour une consommation de dioxygène égale à 3,4 ℓ.min^{-1} est de 201 W à l'unité près.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans un pays, une enquête a été réalisée auprès d'un échantillon de 5 000 familles ne possédant pas plus d'une voiture et pas plus d'un téléviseur.
Lors de cette enquête, 65 % des familles déclarent posséder un téléviseur, 40 % des familles déclarent ne pas posséder de voiture, parmi celles-ci 60 % ne possèdent pas de téléviseur.

1. Montrons que 1 200 familles de l'échantillon ne possèdent ni voiture, ni téléviseur.

   Calculons le nombre de familles déclarant ne pas posséder de voiture : $\dfrac{40}{100} \times 5000 = 2000$.

   Parmi ces 2 000 familles 60 % ne possèdent pas de téléviseur. $\dfrac{60}{100} \times 2000 = 1200$.

   Nous obtenons bien que 1 200 familles de l'échantillon ne possèdent ni voiture, ni téléviseur.

2. Complétons le tableau d'effectifs suivant :

	Nombre de familles ayant un téléviseur	Nombre de familles n'ayant pas de téléviseur	Total
Nombre de familles ayant une voiture	2 450	550	3 000
Nombre de familles n'ayant pas de voiture	800	1 200	2 000
Total	3 250	1 750	5 000

3. On choisit une famille au hasard parmi cet échantillon. On pourra noter :

   T : l'événement « la famille choisie possède un téléviseur » et $\overline{T}$ son événement contraire.

   V : l'événement « la famille choisie possède une voiture » et $\overline{V}$ son événement contraire.

   L'univers est l'ensemble des familles de l'échantillon et la loi mise sur cet univers est l'équiprobabilité.

   La probabilité d'un événement A est $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$. Le nombre d'éléments de l'univers est 5 000.

   a. Déterminons la probabilité que la famille choisie possède une voiture. Il y a 3 000 familles qui possèdent une voiture. $p(V) = \dfrac{3000}{5000} = 0{,}6$.

   remarque : Puisque 40 % des familles ne possèdent pas de voiture, il en résulte que 60 % en possèdent une

   b. Déterminons la probabilité que la famille choisie possède une voiture et un téléviseur. Il y a 2 450 familles qui possèdent une voiture et un téléviseur.

   $p(V \cap T) = \dfrac{3250}{5000} = 0{,}49$.

   c. Déterminons la probabilité que la famille choisie possède une voiture ou un téléviseur.

   Par hypothèse $p(T) = 0{,}65$. $p(T \cup V) = p(T) + p(V) - p(T \cap V) = 0{,}65 + 0{,}6 - 0{,}49 = 0{,}76$

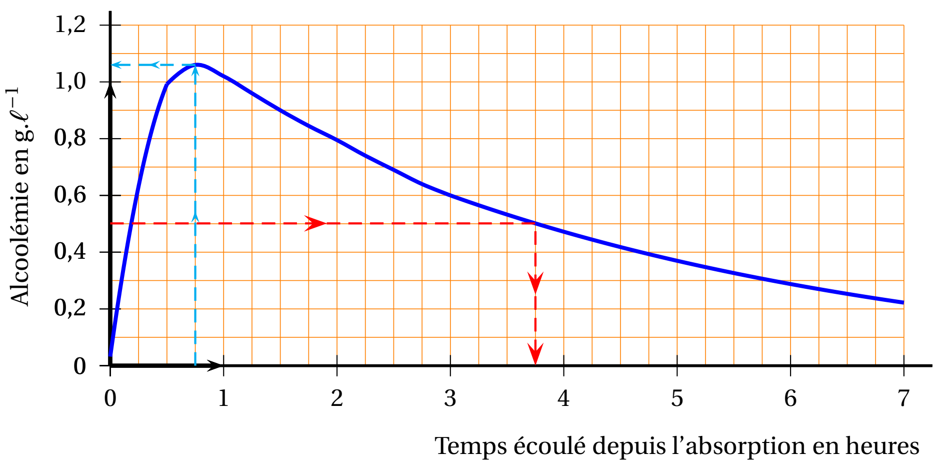
   d. Déterminons la probabilité $p_{\overline{V}}(\overline{T})$ que la famille choisie n'ait pas de téléviseur sachant qu'elle ne possède pas de voiture.

   $p_{\overline{V}}(\overline{T}) = \dfrac{p(\overline{V} \cap \overline{T})}{p(\overline{V})} = \dfrac{\frac{1200}{5000}}{0{,}4} = \dfrac{0{,}24}{0{,}4} = 0{,}6$

   remarque : Nous aurions pu considérer un nouvel univers : l'ensemble des familles ne possédant pas de voitures et chercher la probabilité qu'elle n'ait pas de téléviseur, soit $\dfrac{1200}{2000} = 0{,}6$.

EXERCICE 3 **9 points**

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption.
On appelle « alcoolémie » le taux d'alcool dans le sang ; l'alcoolémie est souvent mesurée en grammes par litre (g.ℓ^{-1}).
Un homme de 80 kg a bu un double whisky et deux verres de vin, ce qui correspond à 60 g d'alcool.
Le graphique ci-dessous représente l'évolution de son alcoolémie en fonction du temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'absorption d'alcool.



Partie A :

Dans cette partie, les résultats seront déterminés graphiquement.

1. Avec la précision permise par le graphique, l'alcoolémie de l'homme semble maximale au bout de trois quarts d'heure. Une valeur approchée de cette alcoolémie serait alors de 1,06 g.ℓ^{-1}.
2. Le code de la route en vigueur autorise la conduite avec une alcoolémie maximale de 0,5 g.ℓ^{-1}.

   Sachant que l'homme doit faire un long trajet pour rentrer chez lui, il pourra prendre sa voiture sans être en infraction au bout de trois heures quarante cinq minutes.

Partie B :

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ qui est représentée par la courbe utilisée dans la partie A.

1. L'expression de la fonction f sur l'intervalle $[3\,;\,7]$ est donnée par : $f(t) = 1,25 \times 0,8^t - 0,04$.

   a. Déterminons par le calcul la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'alcoolémie de l'homme au bout de

   4 h 30 min, $f(4,5) = 1,25 \times 0,8^{4,5} - 0,04 \approx 0,42$.

   6 h 15 min, $f(6,25) = 1,25 \times 0,8^{6,25} - 0,04 \approx 0,27$.

   b. Résolvons, sur l'intervalle $[3\,;\,7]$, l'inéquation $1,25 \times 0,8^t - 0,04 < 0,5$. Résolvons-la d'abord sur $\mathbb{R}$.

   $1,25 \times 0,8^t - 0,04 < 0,5 \iff 1,25 \times 0,8^t < 0,5 + 0,04 \iff 1,25 \times 0,8^t < 0,54 \iff$
   $0,8^t < \dfrac{0,54}{1,25} \iff 0,8^t < 0,432$.

En prenant le logarithme décimal de chaque membre $t\log 0{,}8 < \log 0{,}432$

$\log 0{,}8$ étant négatif $t > \dfrac{\log 0{,}432}{\log 0{,}8}$ d'où $t > 3,7614$.

L'ensemble des solutions sur l'intervalle $[3\,;\,7]$ de l'inéquation est $\left]\dfrac{\log 0{,}432}{\log 0{,}8}\ ;\ 7\right]$.

Nous interprétons ce résultat comme la durée pendant laquelle l'homme doit attendre avant de prendre sa voiture sans être en infraction.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. L'expression donnée plus haut pour la fonction f sur l'intervalle $[3\,;\,7]$ ne convient pas pour l'intervalle $[0\,;\,1]$. L'allure de la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ fait penser à la représentation graphique d'une fonction du second degré.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $g(t) = -1,92t^2 + 2,88t + 0,032$.

Étudions les variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

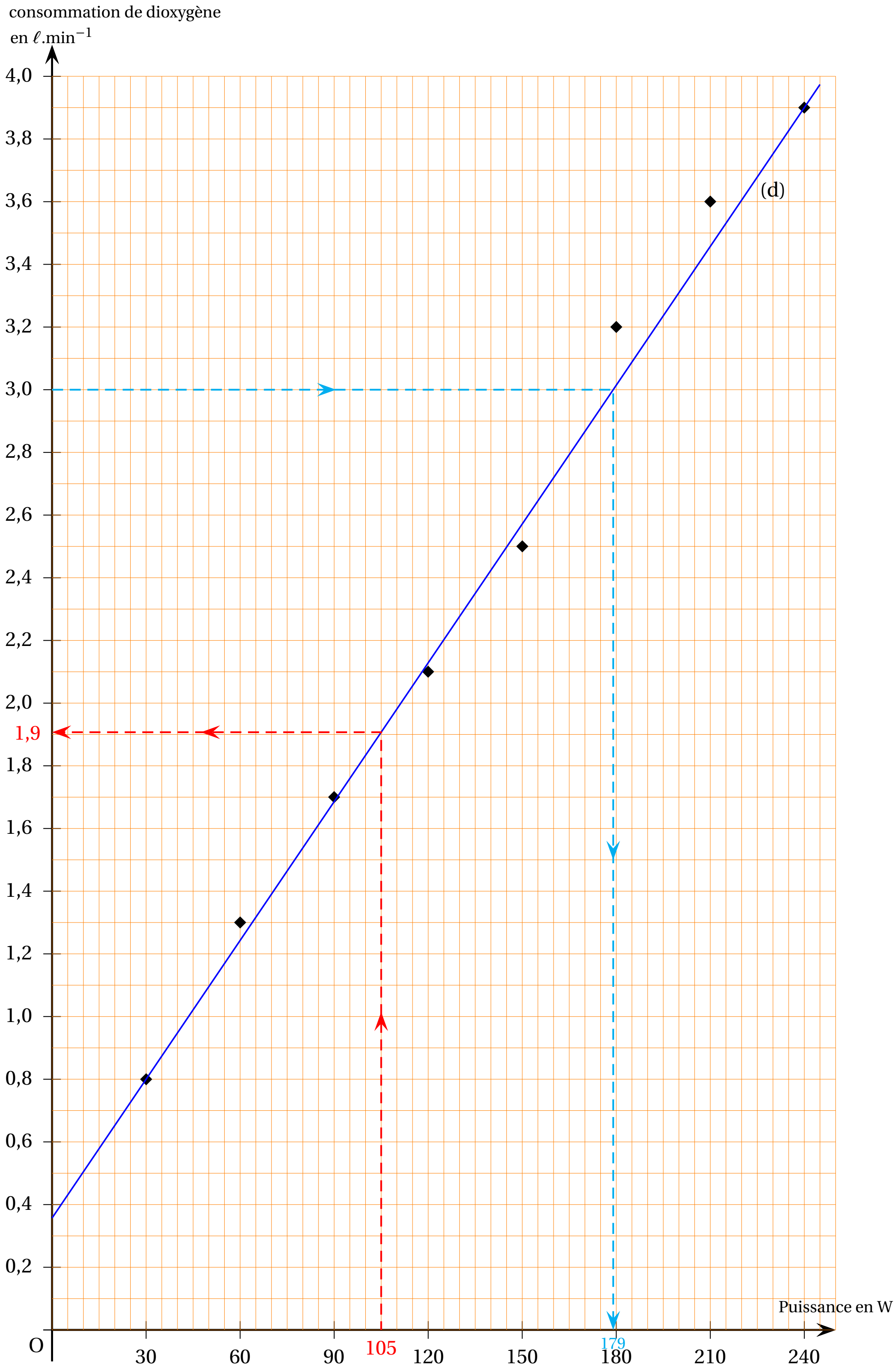
Déterminons d'abord g' la fonction dérivée de g sur $[0\,;\,1]$. $g'(x) = -1{,}92(2t) + 2{,}88 = -3{,}84t + 2{,}88$.

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3{,}84t + 2{,}88 > 0$

$-3{,}84t + 2{,}88 > 0 \iff -3{,}84t > -2{,}88 \iff t < \dfrac{2{,}88}{3{,}84} \iff t < 0{,}75$. Par conséquent $g'(t) > 0$ si $t \in [0\ ;\ 0{,}75[$ et $g'(t) < 0$ si $t \in]0{,}75\ ;\ 1]$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. $g'(t)$ étant positive sur $[0\,;\,0{,}75[$, g est strictement croissante sur cet intervalle. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I. $g'(t)$ étant négative sur $]0{,}75\,;\,1]$, g est strictement décroissante sur cet intervalle.

L'expression $-1,92t^2 + 2,88t + 0,032$ ne pourrait pas convenir pour $f(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ quoique la fonction atteigne un maximum pour $t = 0{,}75$ égal à 1,112 mais il est supérieur au maximum que nous avons pu lire sur le graphique.


consommation de dioxygène
en ℓ.min^{-1}
4,0
3,8
3,6
3,4
3,2
3,0
2,8
2,6
2,4
2,2
2,0
1,9
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
O
30
60
90
105
120
150
179
180
210
240
(d)
Puissance en W