Corrigé du baccalauréat ST2S Métropole 11 septembre 2013

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

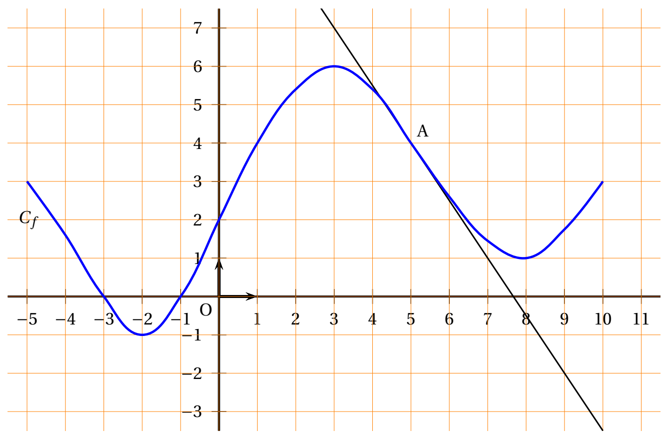
EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 10]$ dont la représentation graphique C_f est donnée dans le repère orthonormal ci-dessous. La droite (D) est tangente à la courbe au point A d'abscisse 5.



1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est :

   a. $\cancel{[0 ; 10]}$ **b.** $\boxed{[-5 ; -3] \cup [-1 ; 10]}$ **c.** $\cancel{[-2 ; 3] \cup [8 ; 10]}$.

   La courbe doit se situer dans le demi-plan des $y \geqslant 0$

2. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est :

   a. $\cancel{\{2\}}$ **b.** $\boxed{\{-3 ; -1\}}$ **c.** $\cancel{\{-2 ; 3 ; 8\}}$.

   Nous lisons l'abscisse des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

3. Le nombre dérivé de la fonction f en $x = 5$ est égal à :

   a. $\cancel{5}$ **b.** $\boxed{-\dfrac{3}{2}}$ **c.** $\cancel{-2}$

   Nous lisons le coefficient directeur de la droite (D).

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2\,500 \times 0,7^x$.

1. L'image, arrondie à l'unité, de 5 par la fonction g est égale à :

   a. $\boxed{420}$ **b.** $\cancel{8\,750}$ **c.** $\cancel{7\,500}$.

2. Les solutions de l'inéquation $g(x) < 100$ sont les nombres réels x tels que :

a. $\boxed{x > \dfrac{\log(0,04)}{\log(0,7)}}$ **b.** $\cancel{x < \dfrac{\log(0,04)}{\log(0,7)}}$ **c.** $\cancel{x < \dfrac{\log(0,7)}{\log(0,04)}}$

$\log(0,7) < 0$

EXERCICE 2 **9 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le service de l'eau d'une ville a été privatisé en 1990, puis géré par la commune à partir de 1996.

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul, donne l'évolution du prix de l'eau de cette ville, en euros pour 120 m^3, entre les années 1990 et 1996.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
2	Prix de 120 m^3 d'eau (en euros)	185	177	189	208	216	222	228
3	Taux d'évolution entre deux années consécutives (en %)							

1. Calculons le taux d'évolution du prix de 120 m^3 d'eau entre 1990 et 1991.

Le taux d'évolution t est défini par $t = \dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $t = \dfrac{177-185}{185} \approx -0,043\,243$

Le taux d'évolution du prix de 120 m^3 d'eau entre 1990 et 1991 est , à un dixième de pourcent près, de $-4,3\,\%$.

2. Une formule qu'on peut entrer dans la cellule D3, qui recopiée vers la droite, donne le pourcentage d'évolution du prix de 120 m^3 d'eau entre deux années consécutives est :

=(D\$2−C\$2)/C\$2 ou =(D2−C2)/C2

On admet que, si le service de l'eau était resté privatisé, le prix de 120 m^3 aurait augmenté de 2,5 % par an à partir de l'année 1996.

On note alors u_n le prix de 120 m^3 d'eau pour l'année $(1996+n)$ où n est un entier naturel. On a alors $u_0 = 228$.

3. À un taux d'évolution de 2,5 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,025. Chaque année, le prix précédent est multiplié par 1,025, la suite (u_n) est, par définition, une suite géométrique de raison 1,025 et de premier terme $u_0 = 228$.

4. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$.
$u_n = 228 \times (1,025)^n$.

5. Le prix de 120 m^3 d'eau en 2012 si le service était resté privatisé aurait été de 428 euros ;
en effet pour 2012, $n = 16$ $\quad u_{16} = 228 \times (1,025)^{16} \approx 338,467 \approx 338$

6. Déterminons à partir de quelle année, le prix de 120 m^3 d'eau aurait dépassé 300 €.
Pour ce faire, résolvons $228 \times (1,025)^n \geqslant 300$.

$228 \times (1,025)^n \geqslant 300 \qquad (1,025)^n \geqslant \dfrac{300}{228} \qquad n \log 1,025 \geqslant \log \dfrac{300}{228} \qquad n \geqslant \dfrac{\log \frac{300}{228}}{\log 1,025} \qquad n \geqslant 11,114.$

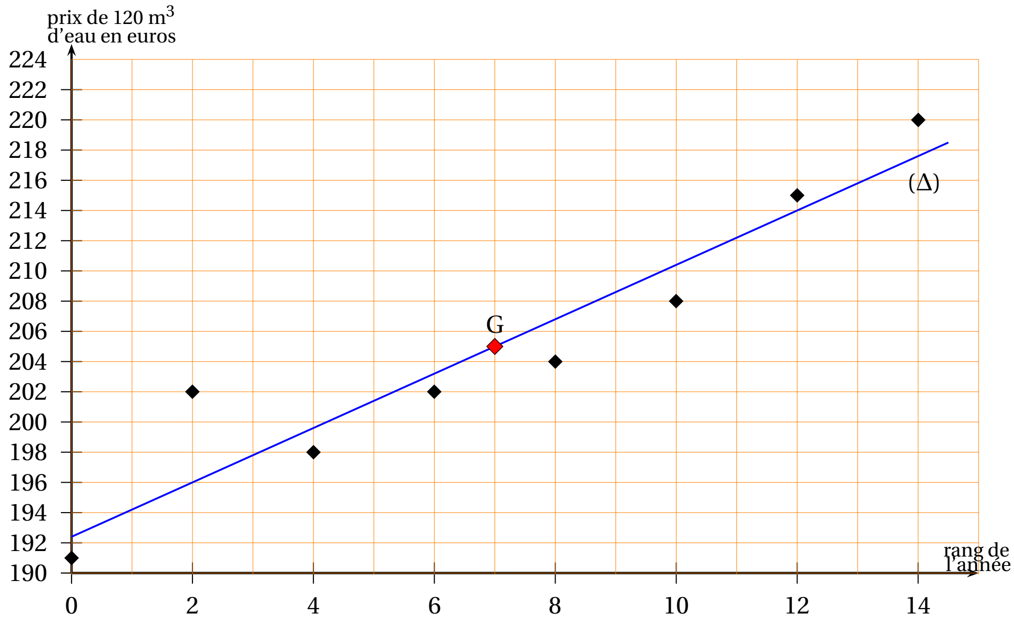
Par conséquent $n = 12$ nous aurons donc à partir de 2008, le prix de 120 m^3 d'eau supérieur à 300 €

Partie B

La ville gère le service de l'eau depuis 1996. Le tableau ci-dessous donne l'évolution du prix de 120 m^3 d'eau depuis 1998.

Année	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Rang de l'année x_i	0	2	4	6	8	10	12	14
Prix de 120 m^3 d'eau en euros y_i	191	202	198	202	204	208	215	220

1. Le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté dans un repère orthogonal :



2. Soit G le point moyen du nuage, calculons les coordonnées de G. Les coordonnées de G sont $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$

$$\overline{x}_G = \frac{0+2+\cdots+12+14}{8} = 7 \quad \overline{y}_G = \frac{191+202+\cdots+215+220}{8} = 205$$

G (7 ; 205) est placé sur le graphique précédent.

3. On admet que la droite (Δ) d'équation $y = 1,8x + 192,4$ réalise un ajustement affine du nuage de points. Cet ajustement est fiable jusqu'en 2020.

a. Le point moyen G appartient à la droite (Δ) car l'ordonnée du point d'abscisse 7 appartenant à Δ est

$1,8 \times 7 + 192,4 = 205$ qui est bien celle du point G.

b. La droite (Δ) est tracée dans le repère précédent.

c. En tenant compte de cet ajustement affine, déterminons le prix de 120 m^3 d'eau que l'on peut prévoir pour l'année 2020. Le rang de l'année 2020 est 22. Remplaçons x par 22, dans l'équation de la droite.

$y = 1,8 \times 22 + 192,4 = 232$.

Selon ce modèle, le prix de 120 m^3 d'eau en 2020 serait de 232 euros.

EXERCICE 3 **6 points**

Une enquête a été menée auprès de 1 700 habitants de diverses régions françaises consommant de l'eau du robinet ou de l'eau en bouteille. Les résultats de l'enquête sont répartis par région dans le tableau ci-dessous :

	Nombre de personnes consommant de l'eau du robinet	Nombre de personnes consommant de l'eau en bouteille	TOTAL
Nombre de personnes habitant en région parisienne	557	274	831
Nombre de personnes habitant en région nord	224	243	467
Nombre de personnes habitant en région sud-ouest	309	93	402
TOTAL	1 090	610	1 700

On considère les évènements suivants :

N : « La personne interrogée habite dans la région nord. »

R : « La personne interrogée consomme de l'eau du robinet. »

Pour chacune des questions suivantes, on donnera les résultats sous forme décimale, arrondie au centième.

1. On choisit au hasard une personne parmi toutes les personnes interrogées.
L'univers est l'ensemble des personnes interrogées. Le nombre d'éléments de cet ensemble est 1 700. Sur cet ensemble la loi mise est la loi équirépartie.
La probabilité d'un évènement A est $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$

a. Calculons la probabilité de l'évènement R. Il y a 1 090 personnes consommant de l'eau du robinet.
$p(R) = \dfrac{1\,090}{1\,700} \approx 0{,}641 \approx 0{,}64$ au centième près.

b. L'évènement $\overline{R}$ est l'évènement : « La personne interrogée ne consomme pas de l'eau du robinet ». Calculons sa probabilité.
$p\left(\overline{R}\right) = 1 - p(R) = 1 - \dfrac{1\,090}{1\,700} = \dfrac{610}{1\,700} \approx 0{,}358 \approx 0{,}36$ au centième près.

c. L'évènement $N \cap R$ est l'évènement : « La personne interrogée habite dans la région nord et consomme de l'eau du robinet. »
Il y a 224 personnes habitant le nord et qui consomme de l'eau du robinet. $p(N \cap R) = \dfrac{224}{1\,700} \approx 0{,}13$.

d. L'évènement $N \cup R$ est l'évènement : « La personne interrogée habite dans la région nord ou consomme de l'eau du robinet. »
$p(N \cup R) = p(R) + p(N) - p(N \cap R)$. Calculons d'abord $p(N)$.
Il y a 467 personnes habitant la région nord donc $p(N) = \dfrac{467}{1\,700}$.
$p(N \cup R) = \dfrac{1\,090}{1\,700} + \dfrac{467}{1\,700} - \dfrac{224}{1\,700} = \dfrac{1\,090 + 467 - 224}{1\,700} = \dfrac{1\,333}{1\,700} \approx 0{,}784 \approx 0{,}78$ au centième près.

2. On veut comparer le type de consommation d'eau suivant les régions :

a. La probabilité qu'une personne interrogée consomme de l'eau du robinet sachant qu'elle habite la région nord est notée $p_N(R)$. Elle est égale à $\dfrac{224}{467} \approx 0,479 \approx 0,48$ (valeurs lues dans le tableau).

Autre méthode : on sait que $p_N(R) = \dfrac{p(N \cap R)}{p(N)} = \dfrac{\frac{224}{1\,700}}{\frac{467}{1\,700}} = \dfrac{224}{467} \approx 0{,}48$.

b. Dans quelle région faudrait-il se placer pour que la probabilité qu'une personne interrogée consomme de l'eau du robinet soit la plus élevée ?

Pour répondre à cette question, calculons la probabilité qu'une personne interrogée consomme de l'eau du robinet

- sachant qu'elle habite la région parisienne : $\dfrac{557}{831} \approx 0{,}67$;
- sachant qu'elle habite en région sud-ouest : $\dfrac{309}{402} \approx 0{,}77$.

Il faut donc se placer dans la région sud-ouest.