∽ Corrigé du baccalauréat ST2S – Nouvelle Calédonie ∾ novembre 2018

Exercice 1 **6 points**

Des études statistiques ont prouvé que 4 % de la population d'un pays est atteinte par une certaine maladie.
Pour cette maladie, un laboratoire pharmaceutique élabore un nouveau test de dépistage.
Les essais sur un groupe témoin ont donné les résultats suivants :

- 4 % des individus du groupe témoin sont atteints par la maladie ;
- 85 % des personnes atteintes par la maladie réagissent positivement au test ;
- 99 % des personnes non atteintes par la maladie réagissent négativement au test.

On choisit au hasard un individu dans le groupe témoin ; on admet que chaque individu a la même probabilité d'être choisi.
Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.
Si F est un évènement de probabilité non nulle, la probabilité de E sachant F est notée $P_F(E)$.

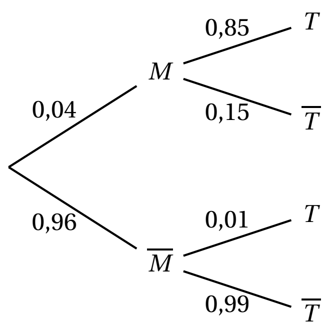
On note les évènements suivants :

- M : « l'individu choisi est atteint par la maladie » ;
- T : « l'individu choisi réagit positivement au test ».

1. La probabilité de l'évènement M vaut 0,04 car 4 % des individus du groupe témoin sont atteints par la maladie.

2. La probabilité qu'un individu réagisse positivement au test sachant qu'il est atteint par la maladie est notée $P_M(T)$.
$P_M(T) = 0,85$ car 85 % des personnes atteintes par la maladie réagissent positivement au test ;

3. Complétons l'arbre de probabilité ci-dessous :



4. $M \cap T$ est l'évènement : « L'individu est atteint par la maladie et réagit positivement au test ». Calculons sa probabilité. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,04 \times 0,85 = 0,034$

5. Montrons que la probabilité de l'évènement T est égale à 0,043 6.
M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers.
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = P(M) \times P_M(T) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,034 + 0,96 \times 0,01 = 0,043\,6.$
Nous obtenons bien la probabilité cherchée.

6. La probabilité qu'un individu ne soit pas atteint par la maladie sachant qu'il réagit positivement au test est notée $P_T\left(\overline{M}\right)$.

$$P_T\left(\overline{M}\right) = \frac{P\left(\overline{M} \cap T\right)}{P(T)} = \frac{0,96 \times 0,01}{0,043\,6} \approx 0,22.$$

7. Certains organismes de santé autorisent la commercialisation d'un test de dépistage lorsque la probabilité de ne pas être atteint par la maladie sachant que la réaction au test est positive est inférieure à 20 %.

   Le laboratoire pharmaceutique ne peut pas espérer, selon ce critère, une commercialisation de son test puisque la probabilité de ne pas être atteint par la maladie sachant que la réaction au test est positive, est supérieure à 20 %.

Exercice 2 — 8 points

L'Allocation Personnalisée d'Autonomie en établissement (APA en établissement) est une allocation destinée aux personnes âgées de plus de 60 ans en perte d'autonomie et résidant dans un établissement de santé.
Dans cet exercice, on modélise de deux façons différentes l'évolution du montant de l'APA en établissement dans un département français.

Partie A

Le tableau suivant donne les montants, en euro, de l'APA en établissement de 2007 à 2015 pour le département considéré :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Montant en euro de l'APA en établissement (y_i)	13 504	14 443	14 914	15 351	15 751	16 144	16 744	17 190	18 070

Source DREES, enquête aide sociale

En annexe 1, à rendre avec la copie, on a représenté, dans un repère orthogonal, le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ associé à cette série statistique.

1. **a.** Déterminons les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
   Le point moyen est le point G de coordonnées $\left(\overline{x}\,;\,\overline{y}\right)$.

   $$\overline{x}_G = \frac{1+\cdots+9}{9} = 5 \quad \overline{y}_G = \frac{13\,504+14\,443+\cdots+17\,190+18\,070}{9} \approx 15\,790$$

   G (5 ; 15 790) *l'ordonnée est arrondie à l'unité.*

   b. Le point G est placé dans le repère précédent.

2. On admet que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 516x + 13\,210$ réalise un bon ajustement affine du nuage de points jusqu'en 2020.

   a. La droite $\mathscr{D}$ est tracée dans le repère précédent. Pour la tracer les coordonnées des points choisis sont (0 ;13 210) (13,2 ; 20 021) .

   b. À l'aide de cet ajustement, donnons une estimation du montant de l'APA en établissement dans ce département pour l'année 2018. En 2018, le rang est 12, remplaçons alors x par 12 dans l'équation de la droite. $y = 516 \times 12 + 13\,210 = 19\,402$
   Une estimation du montant de l'APA en établissement dans ce département pour 2018 s'élèverait, selon ce modèle, à 19 402 €.

Partie B

On a recopié le tableau précédent dans une feuille de calcul d'un tableur.
Les cellules de la ligne 4 sont au format pourcentage.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
2	Rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	Montant en euro de l'APA en établissement	13 504	14 443	14 914	15 351	15 751	16 144	16 744	17 190	18 070
4	Taux d'évolution									

1. **a.** Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

   $\mathcal{T} = \dfrac{18070 - 17190}{17190} \approx 0{,}0512$.

   Le taux d'évolution du montant de l'APA en établissement dans ce département entre 2014 et 2015 exprimé en pourcentage et arrondi à 0,1 % est de 5,1 %.

   b. Une formule que nous pouvons entrer dans la case `C4` pour obtenir, par recopie vers la droite, les taux d'évolution en pourcentage du montant de l'APA en établissement dans ce département, entre deux années consécutives est : =(C$3-B$3)/B$3

2. On suppose maintenant que le montant de l'APA en établissement dans ce département augmente de 5,1% par an après 2015. On décide de modéliser ce montant par une suite numérique (u_n).

   Pour tout entier naturel n, u_n désigne le montant de l'APA en établissement dans ce département, en euro, pour l'année $(2015 + n)$. Ainsi, $u_0 = 18070$.

   À un taux d'évolution de 5,1 correspond un coefficient multiplicateur de 1,051.

   a. $u_1 = 18070 \times 1{,}051 \approx 18992$. *le résultat est arrondi à l'unité.*

   Dans le contexte de l'exercice, u_1 désigne le montant de l'APA en établissement dans ce département, en euro, pour l'année 2016.

   b. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,051 et de premier terme 18 070.

   c. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$. Il en résulte $u_n = 18070 \times (1{,}051)^n$.

3. Parmi les deux modèles (l'ajustement affine de la partie A et la suite (u_n) de la partie B), quel est celui qui prévoit le plus haut montant de l'APA en établissement pour l'année 2018?

   Pour pouvoir effectuer la comparaison, calculons le montant de l'APA en 2018 c'est-à-dire pour $n = 3$. $u_3 = 18070 \times (1{,}051)^3 \approx 20978{,}11$.

   Cette valeur étant supérieure à celle obtenue en utilisant le modèle de la partie A, par conséquent le modèle de la partie B prévoit un plus haut montant de l'APA en établissement pour l'année 2018.

Exercice 3 **6 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(t) = -t^3 + 3t^2 + 24t + 28$.
Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. $f'(t) = -(3t^2 + 3(2t) + 24 = -3t^2 + 6t + 24$.

2. Montrons que, pour tout t appartenant à $\mathbf{R}$, $f'(t) = (4 - t)(3t + 6)$.

   Développons $(4 - t)(3t + 6)$. $(4 - t)(3t + 6) = 12t + 24 - 3t^2 - 6t = -3t^2 + 6t + 24 = f'(t)$.

   Nous obtenons bien $f'(t) = (4 - t)(3t + 6)$.

3. Étudions le signe de $f'(t)$.

   Sur $\mathbf{R}$, $(4 - t > 0) \iff (t < 4)$ $\quad (3t + 6 > 0) \iff (t > -2)$.

   Dressons un tableau de signes

t	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$4-t$		$+$		$+$	0	$-$	
$3t+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

   Sur $]-\infty\,;\,-2[$ ou sur $]4\,;\,+\infty[$, $f'(t) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $]-2\,;\,4[$, $f'(t) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Construisons le tableau de variation de f sur $[0\,;\,8]$.

t	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	108	$\searrow$	$-\infty$

Partie B

Une épidémie de varicelle s'est déclarée dans les crèches d'une commune. On observe son évolution dans le temps.
Un relevé hebdomadaire effectué par le service communal d'hygiène et de santé a permis d'établir le tableau suivant :

Nombre de semaines écoulées depuis le début de l'épidémie (x_i)	0	1	2	3	4	5
Nombre de cas de varicelle (y_i)	25	52	82	100	110	97

1. **a. En annexe 2**, à rendre avec la copie, on a représenté, dans un repère orthogonal, une partie de la courbe représentative de la fonction f. Les points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ correspondant au relevé ci-dessus sont placés dans ce repère.

   b. Nous pouvons considérer qu'il est possible de modéliser le nombre de cas de varicelles au cours du temps par la fonction f puisque les points sont proches de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$. Après nous ne savons pas comment évolue la maladie et si la courbe reste un modèle de l'évolution.

2. En utilisant cette modélisation et avec la précision permise par le graphique, déterminons :

   a. le nombre d'enfants atteints par la varicelle au bout de 10 jours soit 1,428 6 semaine. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1,428 6 soit avec la précision permise par le graphique environ 66.

   Au bout de 10 jours, il y a environ 66 enfants atteints par la varicelle.

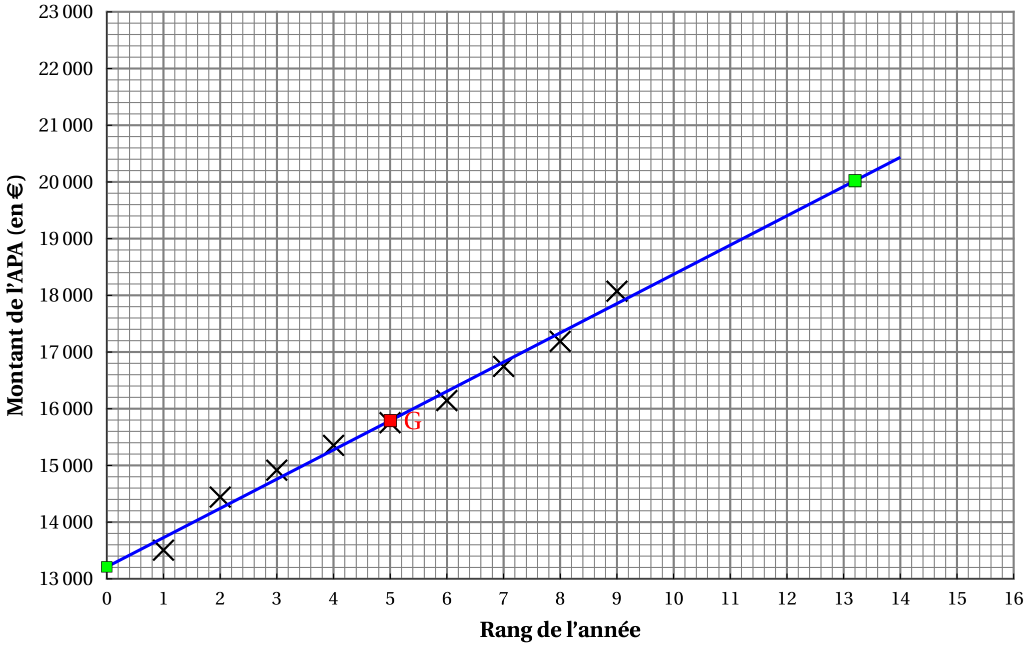
   b. la période durant laquelle le nombre de cas de varicelle est supérieur à 100.

   Nous traçons la droite d'équation y=100. Nous lisons les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la courbe soit 3 et environ 4,9. La durée pendant laquelle le nombre de cas de varicelle est supérieur à 100 est de 1,9 semaine soit un peu plus de 13 jours.

3. Déterminons d'après ce modèle, au bout de combien de semaines il n'y aura plus aucun enfant atteint de varicelle dans les crèches de la commune.

   Si le modèle reste la courbe représentative de f, nous pouvons estimer que la varicelle a disparu des crèches au bout de sept semaines. Nous pouvons lire $f(7) = 0$.

ANNEXE 1
À rendre avec la copie
EXERCICE 2



ANNEXE 2
À rendre avec la copie
EXERCICE 3