Durée : 2 heures

∽ Corrigé du baccalauréat ST2S Polynésie 11 juin 2015 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Le tableau suivant, extrait d'une feuille d'un tableur, donne le prix annuel moyen du paquet de cigarettes (20 cigarettes) le plus vendu, en euros, entre 2000 et 2014.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012	2014
2	Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10	12	14
3	Prix annuel moyen de vente du paquet de cigarettes le plus vendu, en euros : y_i	3,20	3,60	5	5	5,30	5,65	6,30	6,70
4	Taux d'évolution, en pourcentage, par rapport à l'année $n-2$								

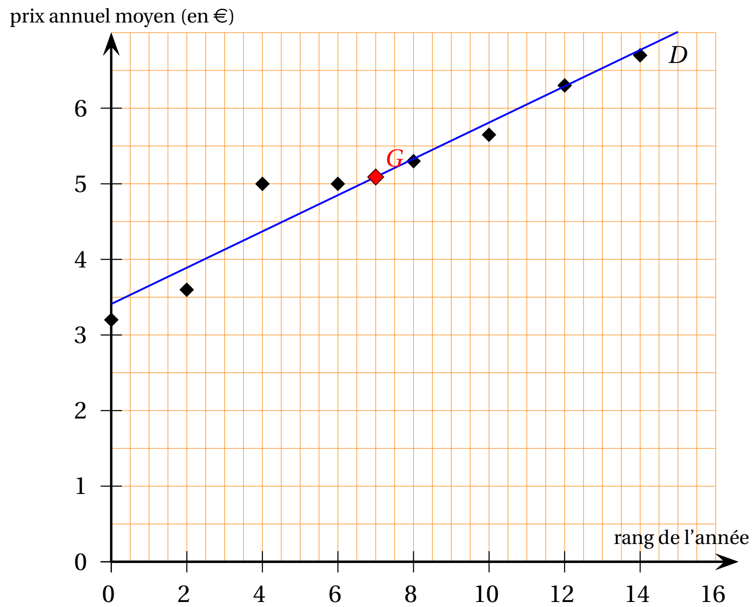
Source : *Observatoire français des drogues et des toxicomanies*

Partie A

1. Un journaliste affirme que le prix entre 2000 et 2014 a augmenté de près de 50 %.
   Calculons le taux d'évolution du prix du paquet entre 2000 et 2014.
   Le taux est défini par $\frac{\text{valeur finale}-\text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $t = \dfrac{6{,}70-3{,}20}{3{,}20} \approx 1{,}09375$.
   Le taux d'augmentation est d'environ 109 %, par conséquent l'affirmation est totalement fausse.
2. La ligne 4 est au format pourcentage. Une formule que nous pouvons saisir dans la cellule C4 et recopier vers la droite pour compléter la ligne 4 est : =(C$3 −B$3)/B$3

Partie B

1. **a.** Le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté dans le repère orthogonal ci-dessous.



b. Soit G le point moyen du nuage, calculons les coordonnées de G. Les coordonnées de G sont $\left(\overline{x}\,;\,\overline{y}\right)$

$$\overline{x}_G = \dfrac{0+2+\cdots+12+14}{8} = 7 \quad \overline{y}_G = \dfrac{3{,}20+3{,}60+\cdots+6{,}70}{8} \approx 5{,}09.$$

G (7 ; 5,09) est placé sur le graphique précédent.

2. On admet que la droite D d'équation $y = 0,24x + 3,41$ est un bon ajustement affine du nuage de points et que cet ajustement reste valable jusqu'en 2025.

a. Le point G appartient à la droite D si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. Calculons l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 7 c'est-à-dire celle de G.

$y = 0,24\times 7+3,41 = 5{,}09$. Cette ordonnée étant celle de G par conséquent G appartient à D.

b. La droite D est tracée sur le graphique précédent en prenant les points de coordonnées $(0\,;3{,}4)$ et $(15\,;7)$.

c. Selon cet ajustement, calculons quel sera le prix moyen annuel d'un paquet de cigarettes en France en 2020. En 2020 le rang de l'année est 20. En remplaçant x par 20 dans l'équation de D, nous obtenons $y = 0{,}24 \times 20 + 3{,}41 = 8{,}21$.

Le prix moyen annuel d'un paquet de cigarettes en France en 2020 serait, selon ce modèle, de 8,21 €.

d. À partir de quelle année celui-ci dépassera-t-il les 10 euros ?

Pour la déterminer, résolvons $0{,}24x + 3{,}41 > 10$.

$0{,}24x+3{,}41 > 10 \quad 0{,}24x > 10-3{,}41 \quad 0{,}24x > 6{,}59 \quad x > \dfrac{6{,}59}{0{,}24} \quad x > 27{,}46$

À partir de 2028 le prix moyen annuel d'un paquet de cigarettes, selon ce modèle dépasserait les dix euros.

EXERCICE 2 **9 points**

Partie A

Entre le 1er janvier 2014 et le 31 décembre 2014, une clinique enregistre 1 200 accouchements.
Depuis quelques années, le nombre annuel d'accouchements a augmenté en moyenne de 3 % par an.
L'objectif du directeur de la clinique est d'atteindre les 8 000 accouchements réalisés dans la clinique d'ici fin 2020, en supposant que ce pourcentage d'augmentation moyen reste constant.
Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n le nombre annuel d'accouchements dans cette clinique pour l'année $2014 + n$.
Ainsi u_0 est le nombre d'accouchements durant l'année 2014, et $u_0 = 1200$.

1. Déterminons le nombre d'accouchements qui ont eu lieu dans cette clinique en 2015.

À une augmentation de 3 % correspond un coefficient multiplicateur de $(1 + \frac{3}{100})$ c'est-à-dire de 1,03. $\quad 1200 \times 1{,}03 = 1236$.

Le nombre d'accouchements qui ont eu lieu dans cette clinique en 2015 est 1 236.

2. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 1 200. En effet pour déterminer le nombre d'accouchements l'année $n+1$, nous multiplions le nombre d'accouchements de l'année n toujours par le même nombre à savoir 1,03. Nous obtenons donc $u_{n+1} = 1{,}03u_n$ et $u_0 = 1200$.

3. Pour tout entier naturel n, exprimons u_n en fonction de n.

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$.

$u_n = 1200 \times (1{,}03^n)$.

4. Déterminons le nombre d'accouchements qui auront lieu dans cette clinique en 2017 selon ce modèle. En 2017 $n = 3 \quad u_3 = 1200 \times 1{,}03^3 \approx 1311$.

5. On rappelle le résultat suivant :
Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, $q \neq 1$, alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

a. Déterminons le nombre total d'accouchements qui auront eu lieu dans cette clinique entre le 1^{er} janvier 2014 et le 31 décembre 2020. En 2020, $n = 6$.

$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_6 = 1\,200 \times \dfrac{1-1{,}03^7}{1-1{,}03} \approx 9\,195.$

Entre le 1er janvier 2014 et le 31 décembre 2020, le nombre total d'accouchements qui auront eu lieu dans cette clinique est d'environ 9 195.

b. Selon ce modèle, le directeur de la clinique peut espérer atteindre son objectif puisque fin 2020 il l'aura dépassé de près de 1 200.

Nous pouvons même constater que sans aucune augmentation il aurait atteint son objectif puisque $1\,200 \times 7 = 8\,400$.

Partie B

L'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) recommande un taux maximum de 15 % de césariennes pour ce type de clinique. En France, pour ces mêmes cliniques, les experts estiment que le taux de césariennes est anormal s'il dépasse les 25 %.

Un journal régional a mené une enquête auprès d'un certain nombre de femmes ayant accouché dans la clinique en 2014. L'objectif de cette étude était de déterminer si la clinique avait tendance à recourir trop fréquemment à une césarienne sans réelle justification médicale. Lors de cette enquête, le journaliste a obtenu les résultats suivants :

— 43 % des femmes interrogées sont des primipares (c'est-à-dire qu'il s'agit de leur premier enfant) et parmi elles, 23 % ont accouché par césarienne à la clinique.

— 11 % des femmes interrogées sont des multipares (c'est-à-dire qu'elles ont déjà accouché auparavant) ayant accouché par césarienne lors d'un accouchement précédent et parmi elles, 64 % ont accouché par césarienne à la clinique.

— Les autres sont des multipares n'ayant jamais accouché par césarienne auparavant et parmi elles, 8 % ont accouché par césarienne à la clinique.

On choisit au hasard une femme ayant participé à l'enquête.
On considère les évènements suivants :

A_0 : « la femme est une primipare » (c'est-à-dire qu'il s'agit de son premier enfant);

M_1 : « la femme est une multipare qui a déjà accouché par césarienne »;

M_2 : « la femme est une multipare qui n'a jamais accouché par césarienne auparavant »;

C : « la femme a accouché par césarienne à la clinique ».

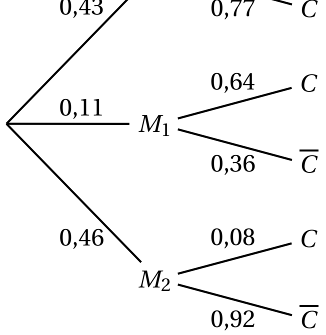
L'évènement contraire de l'évènement C est noté $\overline{C}$.

1. À partir des données de l'énoncé, exprimons :

a. La probabilité de l'évènement M_1 : $p(M_1) = 0{,}11$ car 11 % des femmes interrogées sont des multipares ayant accouché par césarienne lors d'un accouchement précédent;

b. La probabilité que la femme ait accouché par césarienne sachant qu'elle est une multipare qui a déjà accouché par césarienne : $p_{M_1}(C) = 0{,}64$ car parmi elles, 64 % ont accouché par césarienne à la clinique.

2. Complétons l'arbre ci-dessous :



3. $A_0 \cap C$ est l'évènement : « La femme est une primipare et a accouché par césarienne à la clinique ». Calculons sa probabilité.
   $p(A_0 \cap C) = p(A_0) \times p_{A_0}(C) = 0{,}43 \times 0{,}23 = 0{,}0989$.
4. Pour montrer que la probabilité qu'une femme accouche par césarienne dans cette clinique est égale à 0,206 1, calculons $p(C)$.
   $p(C) = p(A_0 \cap C) + p(M_1 \cap C) + p(M_2 \cap C) =$
   $p(A_0) \times p_{A_0}(C) + p(M_1) \times p_{M_1}(C) + p(M_2) \times p_{M_2}(C)$.
   $p(C) = 0{,}0989 + 0{,}11 \times 0{,}64 + 0{,}46 \times 0{,}08 = 0{,}0989 + 0{,}0704 + 0{,}0368 = 0{,}2061$
5. La clinique étudiée respecte-t-elle les recommandations de l'OMS ?
   Non car la probabilité qu'une femme accouche par césarienne dans cette clinique est supérieure à 0,15 ;
   Des experts français ? oui car la probabilité qu'une femme accouche par césarienne dans cette clinique est inférieure à 0,25.

EXERCICE 3 **5 points**

Bien qu'il soit fortement déconseillé de fumer pendant l'allaitement, certaines femmes continuent de le faire. Il convient alors de respecter des mesures de précaution pour minimiser l'exposition de l'enfant à la nicotine.
On s'est intéressé à la concentration de nicotine dans le sang d'une patiente au cours du temps après qu'elle a fumé une cigarette. Elle ne fumera plus pendant toute la durée du test.
On note $f(t)$ la concentration de nicotine dans le sang de la patiente en nanogramme par millilitre(ng/ml) à l'instant t (en heures). L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où la concentration est maximale (pic sanguin atteint très rapidement).
On admet que

$$f(t) = 25 \times 0,7^t, \quad \text{pour } t \in [0 ; 10].$$

1. On admet que sur l'intervalle $[0; 10]$ la fonction f a le même sens de variation que la fonction g définie par $g(t) = 0,7^t$.
   Déterminons le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.
   Nous savons que si $0 < a < 1$ la fonction qui à x associe a^x est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$. Ici $a = 0{,}7$, c'est-à-dire un nombre strictement compris entre 0 et 1 par conséquent la fonction f est une fonction décroissante sur $[0; 10]$.
2. Dressons le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

t	0	10
Variation de f	25	$\approx 0{,}706$

3. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan est donnée **en annexe** :
   a. Déterminons graphiquement la concentration de nicotine dans le sang de la patiente au bout d'une heure et demie.
   Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1,5. Avec la précision permise par le graphique, nous obtenons 14,6.
   La concentration de nicotine dans le sang de la patiente au bout d'une heure et demie est d'environ 14,6 ng/ml.

b. Déterminons graphiquement au bout de combien de temps la concentration de nicotine dans le sang a quasiment disparu, c'est-à-dire quand elle devient inférieure ou égale à 1 ng/ml.

Traçons la droite d'équation $y = 1$ et lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe. Nous obtenons environ 9.

Par conséquent à partir d'environ 9 heures, la concentration de nicotine dans le sang a quasiment disparu.

4. a. Résolvons dans l'intervalle $[0\,;\,10]$ l'inéquation : $f(t) \leqslant 12,5$.

$25 \times (0,7)^t \leqslant 12,5 \quad 0,7^t \leqslant 0,5 \quad t \log 0,7 \leqslant \log 0,5 \quad t \geqslant \dfrac{\log 0,5}{\log 0,7}$, (car $\log 0,7 < 0$).

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{\log 0,5}{\log 0,7}\,;\,10\right]$ ou en arrondissant à l'unité $[2\,;\,10]$.

b. On conseille aux femmes qui fument d'attendre que la moitié de la nicotine présente dans leur sang ait été éliminée avant d'allaiter leur enfant.

Déterminons combien de temps, à l'heure près, la patiente devra attendre avant de pouvoir allaiter son enfant.

La moitié de la nicotine présente dans le sang correspond à 12,5 ng/ml.

Nous avons calculé à la question précédente le temps nécessaire pour que la concentration soit inférieure ou égale à cette valeur. À l'unité près, nous avons obtenu 2.

Par conséquent, les femmes qui fument devraient attendre deux heures avant de pouvoir allaiter leur enfant .

ANNEXE

À rendre avec la copie

EXERCICE 3